Construcción cognitiva del conjunto solución de un sistema de inecuaciones lineales en dos variables

Adrian Munoz Orozco, Gustavo Martínez-Sierra

https://doi.org/10.1590/SciELOPreprints.9654

Envíado en: 2024-08-23
Postado en: 2024-09-11 (versión 1)
(AAAA-MM-DD)

Construcción cognitiva del conjunto solución de un sistema de inecuaciones lineales en dos variables

Cognitive construction of the solution set of a system of linear inequalities in two variables

Adrian Muñoz-Orozco[1], 16348253@uagro.mx.co, Orcid ID: https://orcid.org/0000-0001-5582-470X
Gustavo Martínez-Sierra[2], gmartinezsierra@gmail.com, Orcid ID: https://orcid.org/0000-0002-2462-7401

Resumen
[Objetivo] El objetivo de esta investigación es identificar las estructuras y mecanismos mentales empleados por un grupo de estudiantes para comprender el conjunto solución de un sistema de inecuaciones lineales en dos variables (CSSIL). Los fundamentos teóricos utilizados son la teoría APOE articulada con el concepto de Conexión Cartesiana. **[Metodología]** Este estudio es de tipo cualitativo. Para el diseño del instrumento, elaboramos una descomposición genética preliminar (DGP) y a partir de ella diseñamos tres tareas. Para la recolección de datos, aplicamos estas tareas a un grupo de 19 estudiantes (entre 19 y 22 años). Posteriormente, seleccionamos a los tres participantes que proporcionaron las respuestas más detalladas para realizar una entrevista semiestructurada. **[Resultados]** Los resultados mostraron que los participantes construyeron el Proceso del CSSIL coordinando el Proceso de conjunto solución de la inecuación lineal en dos variables (CSIL) con el Proceso de intersección de conjuntos. Observamos que los participantes asociaban el CSSIL con un polígono y no consideraban que fuera un conjunto vacío, convexo o acotado. **[Conclusiones]** Concluimos que aquellos participantes que construyeron la estructura de acción o un proceso de CSIL mostraron el mismo tipo de estructura en relación al CSSIL. Sugerimos nuevas investigaciones que profundicen en los mecanismos y estructuras mentales descritas en este estudio, así como en el diseño de propuestas de enseñanza que contribuyan a la mejora del aprendizaje del CSSIL.

Palabras clave: inecuación, teoría APOE; tareas; comprensión; Educación Matemática.

Abstract
[Objective] The objective of this research is to identify the mental structures and mechanisms used by a group of students to understand the solution set of a system of linear inequalities in two variables (CSSIL). The theoretical foundations used are the APOS theory articulated with the concept of Cartesian Connection. **[Methodology]** This study is qualitative. For the design of the instrument, we developed a preliminary genetic decomposition (PGD) and based on it we designed three tasks. For data collection, we applied these tasks to a group of 19 students (between 18 and 22 years old). Later, we selected the three participants who provided the most detailed answers to conduct a semi-structured interview. **[Results]** The results showed that the participants constructed the CSSIL Process by coordinating the Solution Set Process of the Linear Inequality in Two Variables (CSIL) with the Set Intersection Process. We observed that the participants associated the CSSIL with a

1 * Facultad de Matemáticas, estudiante del Doctorado en Ciencias con Especialidad en Matemática Educativa, de La Universidad Autónoma de Guerrero, Chilpancingo de los Bravo, México.
2 Facultad de Matemáticas, profesor e investigadores de los posgrados en Matemática Educativa de La universidad Autónoma de Guerrero, Chilpancingo de los Bravo, México.
ESTE DOCUMENTO ES UN PREPRINT (no revisado por pares).

polygon and did not consider it to be an empty, convex or bounded set. **[Conclusions]** We conclude that those participants who constructed the action structure or a CSIL process showed the same type of structure in relation to CSSIL. We suggest new research that delves deeper into the mechanisms and mental structures described in this study, as well as into the design of teaching proposals that contribute to improving CSSIL learning.
Keywords: inequality; APOS theory; tasks; comprehension; Mathematics Education.

Introducción

El uso del marco teórico APOE (Acciones, Procesos, Objetos y Esquemas), propuesto por Dubinsky (1991) para describir cómo un estudiante comprende un concepto matemático a través de un modelo hipotético llamado Descomposición Genética, ha experimentado un crecimiento significativo en los últimos 30 años, convirtiéndose en un referente teórico para la investigación en diversas áreas de Educación Matemática. Por ejemplo, se ha aplicado en estudios sobre Álgebra Lineal (Salgado & Trigueros, 2015), Estadística y Probabilidad (Váquez & Parraguez, 2015), Cálculo (Brijlall & Ndlazi, 2019; Dubinsky et al., 2005), Inducción Matemática (García-Martínez & Parraguez, 2017) y Cálculo Multivariado (Borji & Martínez-Planell, 2020; Martinez-Planell, 2021; Martínez-Planell & Trigueros, 2012, 2019).

En Educación Matemática, se ha articulado la teoría APOE con otros marcos teóricos con el propósito de enriquecer la discusión teórica e interpretar los datos obtenidos desde diversas perspectivas (Borji et al., 2018; Martínez-Planell & Trigueros, 2019; Moon, 2020). Por ejemplo, Font Moll et al. (2016) y Borji et al. (2018) emplearon la teoría APOE en conjunto con el Enfoque Ontosemiótico para analizar el concepto de derivada. Martínez-Planell y Trigueros (2019), así como Trigueros y Martínez-Planell (2010), relacionaron la APOE con la teoría de Registros Semióticos para examinar cómo los estudiantes comprenden la representación gráfica de funciones en dos variables. Chamberlain y Vidakovic (2021) combinaron la Trayectoria Hipotética de Aprendizaje (THA) con la APOE para analizar el concepto de prueba matemática. Por último, Moon (2020) vinculó la APOE con el concepto de Conexión Cartesiana para explicar cómo los estudiantes representan gráficamente inecuaciones en dos variables.

En esta investigación, nuestro interés radica en expandir la discusión sobre la integración de la teoría APOE con la Conexión Cartesiana, una articulación inicialmente propuesta por Moon (2020). En este estudio, ampliamos esta perspectiva para incluir el CSSIL y la articulamos con APOE con el propósito de abordar la siguiente pregunta de investigación:

¿Qué estructuras y mecanismos mentales construyen un grupo de estudiantes para comprender el CSSIL?

Revisión de la literatura

El concepto de inecuación es fundamental para abordar problemas de optimización mediante Programación Lineal en una variedad de campos, tales como Ingeniería Industrial, Administración de Empresas y Economía (Edwards & Chelst, 1999; Moon, 2020; Schreiber & Tsamir, 2012). Además, constituye un tema relevante en la construcción del conocimiento matemático en disciplinas como Álgebra Lineal, Álgebra Abstracta, Cálculo, Ecuaciones Diferenciales y Geometría Analítica (Çekmez, 2021; Ndlovu & Ndlovu, 2020; Paoletti et al., 2021).

En el campo de la Educación Matemática, la investigación sobre las inecuaciones se categoriza en los siguientes enfoques: (1) Dificultades y Errores de Aprendizaje en inecuaciones de una variable (Blanco & Garrote, 2007; Çiltaş & Tatar, 2011; El-khateeb, 2016; Tsamir & Almog, 2001). (2) Propuestas de enseñanza y aprendizaje mediadas por la tecnología para mejorar la comprensión a través de la visualización de inecuaciones en una variable (Abramovich & Ehrlich, 2007; Kabaca, 2013; Tamba et al., 2018). (3) Comprensión de la representación gráfica de inecuaciones de dos variables (Çekmez, 2021; Moon, 2020; Switzer, 2014). Además, (4) Sistemas de inecuaciones en dos variables (Abramovich & Connell, 2015).

En la literatura sobre inecuaciones, se ha observado que las investigaciones que fomentan que los estudiantes establezcan relaciones entre el registro gráfico y algebraico resultan beneficiosas para comprender el conjunto solución de inecuaciones en una variable. Además, la mayoría de las investigaciones se centran en inecuaciones de una variable, dejando de lado las inecuaciones en dos variables o los sistemas de inecuaciones (Abramovich & Ehrlich, 2007; Kabaca, 2013; Moon, 2020; Verikios & Farmaki, 2010). Por ello, la literatura sugiere la necesidad de nuevas investigaciones que amplíen el estudio de las inecuaciones de una variable a las inecuaciones en dos variables o los sistemas de inecuaciones, enfocándose en la comprensión de la representación gráfica del conjunto solución de una inecuación (Abramovich & Connell, 2015; Moon, 2020; Switzer, 2014).

Los estudios sobre sistemas de inecuaciones se han limitado a realizar propuestas de aprendizaje que aún no se han validado empíricamente. Por ejemplo, Abramovich y Connell (2015) diseñaron una secuencia de tareas para enseñar la representación gráfica del CSSIL y las inecuaciones no lineales, basando el diseño de las tareas en el uso de tecnología y en la transición del registro algebraico al gráfico como recurso didáctico para promover el aprendizaje. Edwards y Chelst (1999) sugirieron enseñar el CSSIL a través de contextos reales, resolviendo problemas de Programación Lineal, para que los estudiantes puedan establecer conexiones entre el concepto y situaciones del mundo real.

En investigaciones sobre funciones en dos variables y Programación Lineal, se ha encontrado que la representación gráfica del CSSIL es fundamental para comprender los elementos de una función y la optimización de funciones lineales. Por ejemplo, Martínez-Planell y Trigueros (2012) señalaron que la comprensión de una función en dos variables depende de que los estudiantes hayan encapsulado su dominio como un Objeto, el cual en algunas ocasiones corresponde al CSSIL. En Martínez-Planell y Trigueros (2019), se encontró que los estudiantes suelen tener dificultades para representar el dominio de una función en dos variables cuando este corresponde al CSSIL. En Edwards y Chelst (1999), se enfatizó que la comprensión del CSSIL juega un papel fundamental en la solución de problemas reales de Programación Lineal.

En la literatura, solo encontramos la investigación de Moon (2020), quien articuló la teoría APOE con la Conexión Cartesiana para describir las estructuras y los mecanismos mentales que podrían necesitar los estudiantes para representar gráficamente el conjunto solución de una inecuación. Según Moon (2020), un estudiante tiene una estructura de Acción sobre una inecuación cuando encuentra algebraicamente algunos puntos que satisfacen la inecuación. En la estructura de Proceso, el estudiante representa gráficamente la solución de una inecuación al coordinar las estructuras de Proceso de parámetro y variable, mientras que, en la concepción de Objeto, el estudiante comprende la gráfica de una inecuación como la totalidad de los puntos que satisfacen la expresión algebraica de la inecuación. Los resultados de Moon (2020) mostraron que los estudiantes tienen dificultades para establecer conexiones entre la representación gráfica y algebraica de una inecuación, y en la mayoría de los casos, los estudiantes conciben la representación gráfica en las estructuras de Acción y Proceso.

En resumen, la revisión de la literatura indica que el estudio de la comprensión del CSSIL contribuye a ampliar la investigación sobre las inecuaciones, la cual ha experimentado un crecimiento significativo en los últimos años. La investigación sobre la comprensión del CSSIL también beneficia la investigación en Cálculo y Programación Lineal, dada la relación existente entre el CSSIL y la construcción del conocimiento matemático en estas áreas.

Marco teórico

Teoría APOE

La APOE es un marco teórico cognitivo que describe cómo un estudiante podría comprender un concepto matemático a partir de sus concepciones previas sobre otros conceptos matemáticos (Arnon et al., 2014). Este marco está compuesto por las estructuras mentales: Acciones, Procesos, Objetos y Esquemas; y los mecanismos mentales: interiorización, coordinación, reversión, desencapsulación, encapsulación y tematización. Las estructuras mentales permiten describir la concepción que un estudiante podría tener sobre un concepto matemático, mientras que los mecanismos mentales describen cómo un estudiante se mueve entre las diferentes estructuras (Trigueros & Oktaç, 2019).

Un concepto matemático se concibe inicialmente como una Acción cuando el estudiante realiza una transformación sobre uno o más Objetos previamente comprendidos por él. Para llevar a cabo esta transformación, el estudiante necesita apoyos externos, como el uso de notas de clase, ejemplos previos, ejercicios prototipo o indicaciones del docente. Si el estudiante repite una Acción y comienza a reflexionar sobre ella, interioriza la Acción en la estructura de Proceso. En esta estructura, el estudiante está capacitado para omitir pasos o imaginar el siguiente paso al resolver un problema, lo que le permite desarrollar un control interno sobre las Acciones (Arnon et al., 2014; Martínez-Planell & Trigueros, 2019). Un Proceso puede revertirse para construir un Proceso inverso o coordinarse con otros Procesos para dar origen a nuevos Procesos.

Si un estudiante puede llevar a cabo o concebir nuevas transformaciones (Acciones o Procesos) sobre el Proceso, entonces ha encapsulado ese Proceso en un Objeto. El mecanismo de encapsulación permite al estudiante comprender el Proceso como un todo, pasando de imágenes dinámicas a estáticas del Proceso. En esta estructura, un estudiante puede desepcansular el Objeto en el Proceso del que se originó (Betancur, 2022). En la estructura de Esquema, el estudiante, a través del mecanismo de tematización, puede articular de manera coherente los mecanismos, las estructuras mentales y otros Esquemas previamente construidos para resolver problemas matemáticos u otros problemas en diferentes áreas (Salgado & Trigueros, 2015).

La descripción de los mecanismos y estructuras mentales necesarias para que un estudiante comprenda un concepto matemático se conoce como Descomposición Genética (García-Martínez & Parraguez, 2017). Según Arnon et al. (2014), para diseñar una Descomposición Genética, inicialmente se elabora una Descomposición Genética Preliminar (DGP) basándose en la experiencia del investigador como docente y estudiante, análisis históricos, análisis de libros de texto o publicaciones anteriores sobre el concepto. La DGP se pone a prueba experimentalmente con estudiantes, quienes mostrarán las estructuras previstas y otras inesperadas, lo que permite refinar la hipótesis inicial para describir mejor lo que el estudiante realmente piensa (Martínez-Planell & Trigueros, 2019).

Conexión Cartesiana

La Conexión Cartesiana tiene su origen en la definición propuesta por Moschkovich et al. (1993) respecto a la representación gráfica de la ecuación lineal en dos variables, la cual establece que "un punto está en la gráfica de la línea L sí y sólo sí sus coordenadas satisfacen la ecuación de L" (p. 73). Esta definición fue empleada para indagar cómo los estudiantes de Licenciatura en Matemáticas comprenden que un punto ubicado sobre una línea recta es una solución de la ecuación algebraica, y a su vez, cómo reconocen la línea recta como la representación gráfica del conjunto solución de la ecuación lineal en dos variables (CSEL).

El concepto de Conexión Cartesiana fue ampliado por Moon et al. (2013) para aplicarse a cualquier tipo de ecuación, como se describe: "un punto está en el gráfico de la relación matemática $R(x, y) = 0$ si y sólo sí sus coordenadas satisfacen $R(x, y) = 0$" (p. 204). En el estudio realizado por Moon et al. (2013), se utilizó la Conexión Cartesiana como un marco cognitivo para analizar la comprensión de estudiantes de matemáticas sobre la representación gráfica de figuras cónicas. Los resultados de esta investigación revelaron que los estudiantes enfrentan dificultades para establecer conexiones entre la representación algebraica y gráfica de las figuras cónicas, debido a que no reconocen que un punto sobre la curva satisface la relación algebraica.

En Moon (2020), la definición de la Conexión Cartesiana se reestructura nuevamente para incluir las inecuaciones en dos variables de la siguiente manera: "un punto está en la gráfica de una relación matemática si y sólo sí sus coordenadas satisfacen la relación" (p. 352). En esta investigación, proponemos una definición de la Conexión Cartesiana que incluya los sistemas de inecuaciones como: *un punto (si existe) pertenece a la representación gráfica del conjunto solución de un sistema de inecuaciones si y sólo sí sus coordenadas satisfacen simultáneamente todas las inecuaciones presentes en el sistema*.

Metodología

La metodología empleada en esta investigación es de tipo cualitativo descriptivo, adecuada para el tipo de pregunta de investigación que se pretende responder. Se utilizó el ciclo modificado de APOE, el cual, según Arnon et al. (2014), consta de tres elementos: (1) análisis teórico, (2) diseño e implementación de instrumentos, y (3) la recolección y análisis de datos (ver Figura 1). Además, esta metodología se ha utilizado en investigaciones con características similares a la nuestra, por lo que consideramos pertinente su uso en este estudio.

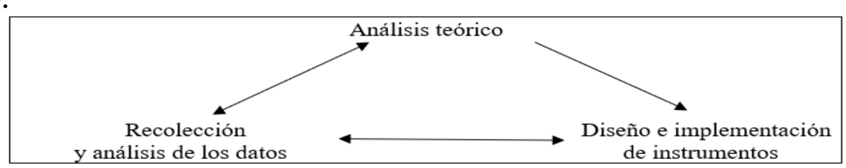

Figura 1**.** *Ciclo modificado de APOE*. Extraído de Arnon et al., (2014)

Análisis teórico

En APOE, la elaboración de una Descomposición Genética requiere diseñar una DGP que se pondrá a prueba con estudiantes mediante actividades diseñadas para observar empíricamente los mecanismos y estructuras planteadas en la DGP (Martínez-Planell & Trigueros, 2019). En el análisis teórico, diseñamos una propuesta de DGP para el CSSIL, basada en nuestro conocimiento de los elementos teóricos de APOE y la Conexión

Cartesiana, nuestra experiencia como educadores y estudiantes, nuestro conocimiento matemático y las investigaciones previas en el tema.

En la DGP, formulamos la hipótesis de que para que un estudiante pueda construir la estructura objeto del CSSIL, primero debe construir la estructura proceso del conjunto solución de la ecuación lineal (CSEL) y las estructuras proceso y objeto de CSIL. Por lo tanto, la propuesta de DGP para el conjunto CSSIL es la siguiente:

Estructuras previas. La estructura Proceso de los conceptos de: variable, coordenada, ecuación en una variable, inecuación en una variable, semiplano y plano cartesiano. La estructura Objeto de: conjunto y $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^2$. Los estudiantes que posean estas estructuras deben ser capaces de comprender qué es una coordenada y representarla en el plano cartesiano, resolver ecuaciones e inecuaciones lineales, llevar a cabo operaciones entre conjuntos e identificar subconjuntos de $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^2$.

Construcción de la estructura Proceso CSEL en su representación gráfica. En la estructura Acción, el estudiante asigna valores a x o y, para reducir la ecuación de dos variables a una sola variable, con el fin de hallar algebraicamente algunos puntos que satisfagan la ecuación $ax + by = c$. A medida que el estudiante repite esta Acción la interioriza en un Proceso que, al coordinarse con el Proceso de plano cartesiano, le permite construir el Proceso del *CSEL* en su representación gráfica. En esta estructura el estudiante comprende que cualquier punto sobre la gráfica de la recta satisface la ecuación.

Construcción de la estructura Proceso del CSIL en su representación gráfica. El estudiante, en la estructura Acción, encuentra algebraicamente algunos puntos que satisfacen la inecuación $ax + by < c$. Si el estudiante repite esta Acción, la interioriza en un Proceso en el cual se imagina que infinitos satisfacen la inecuación. Este Proceso se coordina con las estructuras Proceso del CSEL y del plano cartesiano, lo que le permite construir el Proceso del CSIL en su representación gráfica. En esta estructura, el estudiante comprende que la representación gráfica del CSIL siempre estará acotada superior o inferiormente por la gráfica de la ecuación.

Construcción de la estructura Objeto del CSIL. Si el estudiante realiza o imagina nuevas trasformaciones sobre la presentación grafica del CSIL. Por ejemplo, cuando el estudiante utiliza la gráfica de una inecuación para determinar si un elemento satisface la relación algebraica y comprende a la representación gráfica de la inecuación como su conjunto solución. Además, es capaz de realizar operaciones como diferencia simétrica, complemento o unión entre los conjuntos solución de las inecuaciones $ax + by = c, ax + by < c$ y $ax + by > c$.

Construcción de la estructura Proceso del CSSIL en su representación gráfica. El estudiante desencapsula el objeto CSIL en un proceso para representar gráficamente las inecuaciones presentes en el sistema. Este proceso se coordina con el proceso de intersección de conjuntos para graficar el CSSIL. En esta estructura, el estudiante comprende al CSSIL como una intersección de conjuntos, es decir, reconoce que un punto satisface el sistema sí y solo sí satisface a todas las inecuaciones presentes en él.

Construcción de la estructura Objeto del CSSIL. Si el estudiante establece conexiones cartesianas entre la representación gráfica y algebraica del CSSIL, consideramos que ha encapsulado el proceso del CSSIL en un Objeto. En esta estructura, el estudiante puede determinar mediante la representación gráfica del sistema si un elemento pertenece al CSSIL.

Además, tiene la capacidad de caracterizar el CSSIL a partir de la gráfica del sistema como un conjunto convexo, acotado o vacío.

Diseño e implementación de instrumentos

En APOE, el diseño y aplicación de tareas son fundamentales para identificar las estructuras construidas y los mecanismos mentales empleados por los participantes durante la solución de estas (Arnon et al. 2014), Además, el papel de la entrevista es crucial para profundizar en estas estructuras y mecanismo mentales, y para representar fielmente lo que comprende un estudiante a través de la Descomposición Genética (Trigueros & Oktaç, 2019). Por ello, diseñamos dos instrumentos: una actividad con tres tareas y una entrevista semiestructurada.

Las tareas fueron elaboradas a partir de la DGP sobre el CSSIL. En la Tarea 1, esperamos que los estudiantes utilicen la estructura proceso del CSEL coordinada con la estructura proceso del plano cartesiano para representar gráficamente el CSIL. Además, esperamos que muestren evidencia de las Acciones y Procesos planteados como hipótesis en la DGP. Consideraremos que los estudiantes construyeron una estructura proceso del CSIL si pueden explicar cómo graficar una inecuación y una estructura objeto si pueden establecer conexiones cartesianas entre la representación gráfica y algebraica de la inecuación. En la Tarea 2, esperamos que los estudiantes muestren la estructura proceso del CSIL y la coordinen con el proceso de intersección de conjuntos para representar gráficamente el CSSIL. Si los estudiantes reconocen que un punto satisface el sistema pertenece a todas las inecuaciones del sistema, consideraremos que han construido la estructura proceso del CSSIL. Si establecen conexiones entre la representación gráfica y algebraica del sistema, pueden explicar usando la representación gráfica del sistema que un punto pertenece al CSSIL o pueden caracterizarlo como vacío o acotado, consideraremos que han construido la estructura Objeto del CSSIL. En la Tarea 3, cambiamos el símbolo ">" por "≥" para explorar cómo los estudiantes reflexionan gráfica y cognitivamente sobre este cambio de símbolo, así como para observar cómo varía el conjunto solución de la inecuación y los sistemas de inecuaciones a partir de este cambio de signo.

El objetivo de la entrevista semiestructurada fue profundizar en las estructuras construidas y los mecanismos mentales mostrados por los participantes durante la solución de las tareas. Además, a partir de las entrevistas, esperábamos aumentar la fiabilidad del análisis de los datos, ya que, al obtener una mayor cantidad de información sobre el razonamiento de los estudiantes, contamos con más elementos para interpretar el tipo de estructura construida. Por ejemplo, consideramos que, si un estudiante representa el CSIL, no es suficiente evidencia para interpretar que ha construido la estructura proceso, si no puede explicar cómo lo realizó o no logra establecer conexiones cartesianas entre la representación gráfica y algebraica.

Tabla 1.

Instrumento de recolección de información

Tarea 1. Represente en el plano cartesiano todos los puntos que satisfacen $2x - 3y < 12$. Justifique ampliamente su respuesta. Tarea 2. Represente en el plano cartesiano todos los puntos que satisfacen el sistema de inecuaciones $\begin{cases} 2x - 3y < 12 \\ -2x + 5y < -10 \end{cases}$

Tarea 3. Represente en el plano cartesiano todos los puntos que satisfacen el sistema de inecuaciones $\begin{cases} x \geq 4 - y \\ 2y \leq -x + 8 \\ x \leq 4 \end{cases}$

En este estudio participaron 19 estudiantes de entre 19 y 22 años, quienes se encontraban cursando el cuarto semestre del programa de Administración de Empresas en la Corporación Universitaria Autónoma de Nariño, en Cali (Colombia). Los participantes estaban matriculados en la asignatura de Investigación de Operaciones, la cual era impartida por un profesor que aceptó participar en la investigación. Durante cuatro sesiones de clase, los estudiantes estudiaron el CSSIL como parte del método gráfico de Programación Lineal, que es uno de los temas más relevantes del curso. Previamente, los estudiantes habían cursado Matemática Fundamental y Álgebra Lineal. De los 19 estudiantes, se seleccionaron tres participantes para una entrevista semiestructurada, los cuales fueron elegidos por su capacidad para completar todas las tareas de la actividad y por su buen desempeño académico. A estos participantes se les asignaron los seudónimos de Fernando, Eduardo y Julián.

La recolección de datos se realizó en el primer semestre del 2023, para ello citamos presencialmente a los 19 participantes para que resolvieran la actividad durante el horario de clases de la asignatura Investigación de Operaciones, bajo la supervisión del profesor de la asignatura. La prueba se realizó de manera individual y tuvo una duración de hora y media. Además de proporcionar respuestas escritas, se les pidió a los participantes que grabaran un video explicando cómo habían resuelto cada tarea, el cual debían enviar por WhatsApp al número del primer autor. La entrevista semiestructurada se llevó a cabo seis días después de la solución de las tareas, de manera remota a través de la plataforma Google Meet. Cada entrevista fue grabada en video, con el consentimiento de los participantes, utilizando la función de grabación de la plataforma. La duración promedio de las entrevistas fue de 45 minutos.

Para el análisis de los datos realizamos una copia digital de las respuestas a las tareas proporcionadas por los participantes, las cuales las organizamos en una carpeta junto con los videos que explicaban la solución de cada tarea. Posteriormente, transcribimos los diálogos de los videos y llevamos a cabo un análisis preliminar de las tareas y los videos utilizando la DGP sobre el CSSIL. Con base en este análisis preliminar, seleccionamos tres participantes para la entrevista semiestructurada. Luego, trascribimos los diálogos de las entrevistas, y estos, junto con las soluciones de las tareas, fueron analizados por el primer autor de esta investigación. Posteriormente, este análisis fue corroborado por el segundo autor.

Resultados

En esta sección, presentamos los mecanismos y estructuras mentales que exhibieron los tres participantes entrevistados al resolver las tareas y responder las preguntas de la entrevista. La descripción de los resultados se realiza en función de las estructuras y mecanismos mentales descritos en la DGP sobre el CSSIL.

Construcción de la estructura Proceso del CSEL en su representación gráfica

A partir del diseño de las Tareas, esperábamos que la estructura Proceso del CSEL emergiera durante su resolución. Observamos que los participantes utilizaron la gráfica de la ecuación para representar visualmente el CSIL y el CSSIL, establecieron conexiones cartesianas entre la representación gráfica y algebraica de la ecuación, y comprendieron en qué condiciones los elementos de la ecuación pertenecían al CSIL o al CSSIL.

ESTE DOCUMENTO ES UN PREPRINT (no revisado por pares).

Por ejemplo, en la Tarea 1, Eduardo comenzó por graficar la ecuación $2x - 3y = 6$ para representar gráficamente la inecuación. Para ello, primero determinó algebraicamente los puntos $(0, -4)$ y $(6{,}0)$ que satisfacen la ecuación, luego los representó en el plano cartesiano y trazó una recta sobre ellos (Figura 2). De esto interpretamos que, en la estructura Acción del CSEL, Eduardo utilizó las estructuras previas de variable y ecuación para asignar valores a la variable x y determinar el valor de la otra variable. Esta Acción la repitió (Extracto 1) hasta interiorizarla en un Proceso, el cual coordinó con el Proceso de plano cartesiano para construir el Proceso del CSEL en su representación gráfica.

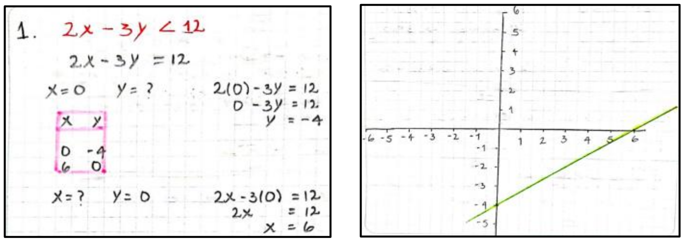

Figura 2. *Solución parcial de la Tarea 1 realizada por Eduardo*

Extracto 1. *Eduardo explica cómo graficar una ecuación*

Investigador: ¿Por qué cambiaste la inecuación por una ecuación?
Eduardo: Lo que estuvimos viendo en los temas anteriores era así, lo iguale para poder sustituir los valores x y y pero en cero.
Investigador: Entonces es por indicación del docente, tú has reflexionado sobre ello.
Eduardo: Sí, solo por la explicación del docente… es para darle valores a la x y a la y para poderlo ubicar en la recta.

En las tareas, esperábamos que los participantes relacionaran las soluciones de la ecuación, la inecuación y los sistemas de inecuaciones, con el fin de mostrar las estructuras mentales que construyeron sobre estos conceptos. En el caso de Fernando, durante la Tarea 2, observamos que estableció conexiones cartesianas entre la representación gráfica y algebraica del CSEL. Por ejemplo, le preguntamos si el punto $(0, -2)$, un punto sobre $-2x + 5y = -10$, satisface el sistema. Él respondió apoyándose en su representación gráfica (Figura 3), que el punto $(0, -2)$ no lo satisface porque no pertenece a la solución de la inecuación $-2x + 5y < -10$. Además, agregó que para que el punto pertenezca al sistema, la inecuación debería ser $-2x + 5y \leq -10$ (Extracto 2). A partir de esto, interpretamos que Fernando comprende que un punto sobre la recta satisface la ecuación, porque al cambiar el símbolo $<$ por $\leq$, implica que todos elementos de la recta $-2x + 5y = -10$ satisfacen $-2x + 5y \leq -10$, y en consecuencia el punto $(0, -2)$ pertenece al sistema de inecuaciones. Lo expresado por Fernando también podría ser útil para mostrar la estructura proceso para el CSIL y el CSSIL, pero más adelante nos enfocaremos en estas estructuras mentales.

Extracto 2. *Fernando estableciendo conexiones cartesianas para la ecuación*

Investigador: ¿El punto (0,-2) satisface el sistema de la Tarea 2?
Fernando: No satisface. En la inecuación número (1) si cumple, pero en la (2) no cumpliría (señala la Figura 3) porque como es menor debe estar para abajo (de la recta) o la inecuación debería ser menor o igual a -10…

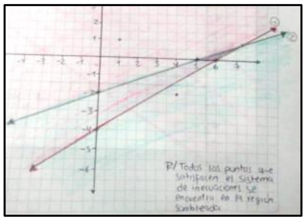

Figura 3. *Tarea 2 realizada por Fernando*

Construcción de la estructura Proceso del CSIL en su representación gráfica

Los tres participantes exhibieron acciones similares al representar gráficamente el CSIL, las cuales consistieron en: 1) cambiar la inecuación por la ecuación, 2) representar el conjunto solución de la ecuación, 3) encontrar algebraicamente algunos puntos que satisfacen la inecuación y 4) trazar la región correspondiente al conjunto solución. Por ejemplo, en la Tarea 1, Fernando siguió el siguiente procedimiento para graficar $2x - 3y < 12$:1) cambió $2x - 3y < 12$ por $2x - 3y = 12$, 2) graficó $2x - 3y = 12$, 3) seleccionó el punto $(5, -4)$ por "debajo" y $(2{,}2)$ por "encima" de la ecuación, sustituyó estos puntos la expresión $2x - 3y < 12$ para determinar cuál la satisface, y 4) finalmente, como el punto $(2{,}2)$ pertenece a $2x - 3y < 12$, dibujó el CSIL en la parte superior de la recta $2x - 3y = 12$ (Figura 4).

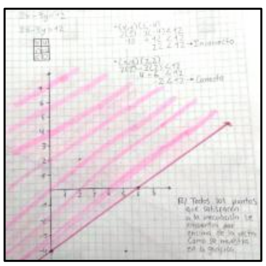

Figura 4. *Solución de la Tarea 1 realizada por Fernando*

Basándonos en lo descrito anteriormente, interpretamos que en la estructura de Acción del CSIL, Fernando encontró algebraicamente al menos un punto que satisface la inecuación, ya sea ubicado por encima o por debajo de la ecuación. Esta Acción la interiorizó como un Proceso, el cual le permitió deducir, a partir de la ubicación del punto encontrado, dónde se representa el CSIL. Este Proceso lo coordinó con las estructuras de Proceso de CSEL en su representación gráfica y del plano cartesiano, para construir la estructura de Proceso del CSIL en su representación gráfica.

En la estructura proceso, los estudiantes interiorizaron que el conjunto solución de $ax + by < c$ siempre estará por "encima" o por "debajo" de la ecuación $ax + by = c$. Por ejemplo, Eduardo explicó que para representar el CSIL de la Tarea 1, comenzaba con representar la ecuación y luego suponía que la "región" se extendía hacia arriba o hacia bajo de la recta. Elegía dos puntos del plano situados en la parte superior o inferior de la ecuación, los sustituía en la inecuación y si ambos puntos satisfacían la desigualdad, entonces la región se extendía hacia donde estaban los puntos (Extracto 3).

Extracto 3. *Eduardo explicando cómo representar gráficamente una inecuación*

Investigador: ¿Por qué a partir de dos puntos lograste generalizar que la solución está en la parte superior?

Eduardo: Me fijo en el plano cartesiano y uno supone que la región va hacia arriba y con dos puntos creo que estoy segura de la solución.

Investigador: Bajo qué criterio eliges esos puntos.
Eduardo: Yo elijo cualquiera siempre y cuando esté por encima de la recta, es decir, hacia el lado donde creo que esta la región.

Construcción de la estructura Objeto del CSIL

Si un estudiante utiliza la representación gráfica del CSIL para determinar si un punto pertenece a su conjunto solución y establece conexiones entre su representación algebraica y gráfica, interpretamos que está encapsulando el Proceso del CSIL en un Objeto. Este mecanismo lo observamos en la respuesta de Fernando a la pregunta "¿El punto (-4,0) satisface la inecuación de la Tarea 1?" Él respondió que sí y justificó su respuesta utilizando tanto la representación gráfica como la algebraica (Extracto 4).

Extracto 4. *Eduardo estableciendo conexiones cartesianas en la inecuación*

Investigador: El punto $(-4{,}0)$ satisface la inecuación $2\mathrm{x} - 3\mathrm{y} < 12$.
Eduardo: Sí, porque se encuentra por arriba (de la recta) y está en la región.
Investigador: Otra forma de probar esa afirmación.
Eduardo: El $(-4{,}0)$ lo probaría en $2(-4) - 3(0) < 12$, que eso daría -8 menor a 12.

Que un estudiante represente gráficamente el CSIL a partir de su expresión algebraica no es suficiente evidencia para justificar que ha encapsulado el Objeto de CSIL en un Objeto. Esto lo observamos en la Tarea 1, donde Julián representó gráficamente la inecuación $2x - 3y < 12$ (Figura 5); sin embargo, al ser preguntado si el punto (6,0) satisface esta inecuación, Julián respondió que es un punto que está sobre la recta $2x - 3y = 12$, pero no pudo concluir que el punto no pertenece al CSIL (Extracto 5). A partir de esto, interpretamos que Julián no logró establecer conexiones cartesianas entre la representación gráfica y algebraica de la inecuación, por lo que consideramos que no surgió el mecanismo de encapsulación y no construyó el Objeto del CSIL.

Extracto 5. *Julián no establece conexiones para una inecuación*

Investigador: ¿El punto (6,0) satisface la inecuación $2\mathrm{x} - 3\mathrm{y} < 12$?
Julián: ¿El (6,0)?
Investigador: Si, un punto que esta sobre la recta.
Julián: No me cumple porque me daría mayor a 12.
Investigador: ¿Te daría mayor?
Julián: Espere lo pienso… me daría 12 menor a 12.

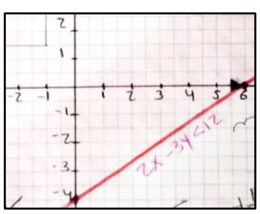

Figura 5. *Solución de la Tarea 1 realizada por Julián*

Construcción de la estructura Proceso del CSSIL en su representación gráfica

Desde la DGP, esperábamos que los estudiantes construyeran el proceso de CSSIL en su representación gráfica al coordinar el proceso del CSIL en su representación gráfica con el proceso de intersección de conjuntos. Esta hipótesis se cumplió con Fernando y Eduardo, pero no ser confirmada con Julián, porque consideramos que él no había construido el proceso del CSIL en su representación gráfica. En el caso de Fernando y Eduardo, para representar gráficamente el CSSIL: 1) representaban gráficamente las inecuaciones del sistema, usando colores diferentes para distinguir cada conjunto, 2) identificaban la intercesión de los conjuntos y 3) concluían cual era la representación gráfica del CSSIL. Por ejemplo, Eduardo representó el CSSIL de la Tarea 2 siguiendo el procedimiento: 1) representó gráficamente las inecuaciones $2x - 3y < 12$ y $-2x + 5y < -10$ usando los colores morado y verde respectivamente, 2) identificó la intercesión de los dos conjuntos y 3) concluyó que la solución del sistema estaba donde se interceptaban ambos conjuntos (Figura 6).

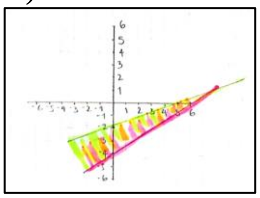

Figura 6. *Representación de Eduardo sobre del CSSIL de la Tarea 2*

En la estructura de proceso, los estudiantes comprendían el CSSIL como un conjunto infinito y lo asociaban con un polígono formado por la intersección de las inecuaciones del sistema. Además, reconocían la necesidad de que hubiera dos o más inecuaciones para resolver un sistema. Por ejemplo, Eduardo relacionó el CSSIL de la Tarea 2 con un polígono donde se interceptan el conjunto solución de las inecuaciones y mencionó la necesidad de que al menos existiera otra inecuación para resolver el sistema (Extracto 6).

Extracto 6. Eduardo caracterizando el CSSIL

Investigador: ¿Cuál es el papel de la inecuación en el sistema de inecuaciones?
Eduardo: Con la inecuación nos damos cuenta hacía que lado del plano cartesiano se va a ubicar el polígono donde se interceptan todas las regiones… Por ejemplo, en este punto (Tarea 1) que hay una sola inecuación no podríamos sacar el polígono, tendrían que haber más (inecuaciones).

Los resultados muestran que, si un estudiante no ha construido el proceso de CSIL en su representación gráfica, esto afecta la construcción del proceso de CSSIL. Esta conclusión se deriva de las respuestas del estudiante Julián, quien, como recordamos, representó el CSIL en la Tarea 1 pero no logró establecer conexiones cartesianas entre su representación gráfica y algebraica (Extracto 5). Consideramos que esto influyó en la solución de la Tarea 3, donde Julián representó las inecuaciones del sistema como si fueran rectas ($x = 4$, $-x + 2y = 8$ y $x = 4 - y$), en lugar de las tres inecuaciones como se esperaría según la DGP (Figura 7).

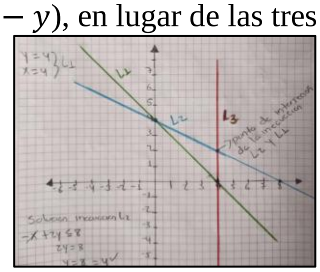

Figura 7. Solución de la Tarea 3 por parte de Julián.

Construcción de la estructura Objeto del CSSIL

Sí un estudiante establece conexiones entre la representación gráfica y algebraica del CSSIL y comprende que un punto pertenece al sistema si y sólo sí satisface todas sus inecuaciones, consideramos que ha encapsulado el CSSIL como un objeto. Por ejemplo, cuando se le preguntó a Fernando si el punto (3,2) satisface el sistema de la Tarea 3, él respondió apoyándose en la gráfica del sistema, que el punto sí lo satisface (Extracto 7). De esta respuesta, interpretamos que Fernando no necesitó de la representación algebraica para responder si el punto (3,2) pertenece al CSSIL, porque comprende que cualquier punto sobre la representación gráfica del sistema es una solución. Además, Fernando explicó que el punto (2,5) no pertenece al sistema porque satisface las inecuaciones uno y tres, pero no la dos. A partir de esto, concluimos Fernando desencapsuló el objeto del CSSIL en el proceso de CSIL en su representación gráfica e intersección de conjuntos, al utilizar la representación gráfica de las inecuaciones del sistema y el proceso de intercepción de conjuntos para justificar que el punto (2,5) no pertenece al CSSIL de la Tarea 3.

Extracto 7. *Fernando estableciendo conexiones para el CSSIL*

Investigador: ¿Por qué separas las inecuaciones para resolver el sistema?
Fernando: Separar las inecuaciones me permite encontrar los puntos que solucionan el sistema, que es donde se interceptan todas las regiones de las inecuaciones.
Investigador: El punto (3,2) ¿satisface el sistema el sistema (Tarea 3)?
Fernando: Si satisface el sistema (apoya su respuesta señalando con el cursor la representación gráfica de la solución de la Figura 8)
Investigador: ¿El punto (2,5) también satisface el sistema?
Fernando: No satisface el sistema de inecuaciones, solamente cumpliría en la inecuación 1 y en la 3, pero no en la 2 (explica usando la representación gráfica*)*

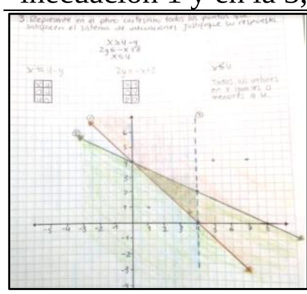

Figura 8. *Solución Tarea 3 por parte de Fernando*

Discusión

Los resultados revelaron que la mayoría de los participantes solo muestran evidencia de comprender los conceptos matemáticos en las estructuras de Acciones y Procesos, lo cual concuerda con hallazgos de otras investigaciones. Por ejemplo, en el estudio de Moon (2020), los participantes solo mostraron comprensión del conjunto solución de una inecuación en dos variables en la estructura de acción y, en algunos casos, como un Proceso. En el trabajo de Trigueros y Martínez-Planell (2010), se señaló que los estudiantes enfrentan dificultades para desarrollar la estructura objeto de la representación gráfica de funciones de dos variables, limitando sus concepciones a las estructuras de Proceso y objeto.

En Moon et al. (2013), se señaló que si un estudiante representa gráficamente una relación matemática a partir de una expresión algebraica, no constituye evidencia suficiente para concluir que establece conexiones cartesianas entre ambas representaciones. Este hallazgo también se evidenció en nuestra investigación, particularmente en el caso de Julián en la Tarea 1, como se mostró en la sección 5.3, donde Julián representó gráficamente $2x - 3y < 12$, pero no estableció conexiones entre la representación gráfica y algébrica del CSIL.

Los resultados de esta investigación muestran que, en la estructura de Proceso, un estudiante representa gráficamente una relación matemática a partir de su representación algebraica. A partir de estos resultados, consideramos que la propuesta de Abramovich y Connell (2015) para la enseñanza de sistemas de inecuaciones solo permitiría alcanzar las estructuras de Proceso. Esto se debe a que las herramientas tecnológicas les permiten a los estudiantes visualizar el conjunto solución del sistema, pero no sería suficiente para promover que realicen conexiones entre la representación gráfica y algebraica de un sistema.

En relación a los resultados de Moon (2020) encontramos algunos de sus resultados coinciden con algunos de los nuestros. Por ejemplo, para graficar el CSIL algunos de los participantes en Moon (2020) utilizaban el método de prueba, que consistía en representar el conjunto solución a partir de un punto que satisface la inecuación. Este procedimiento también lo observamos en esta investigación en la sección 5.2, cuando Fernando explicó como representó gráficamente el CSIL de la Tarea 1. Además, Moon (2020) encontró que los estudiantes tenían dificultades para establecer conexiones cartesianas entre la representación gráfica y algebraica; aspecto que también lo observamos con Julián en la sección 5.3. Sugerimos que en la enseñanza de las inecuaciones en dos variables se diseñen propuestas alternativas al método de prueba, que ayude a los estudiantes a construir la estructura objeto del CSIL y posteriormente contribuir a comprender como objeto el CSSIL.

La entrevista semiestructurada resultó ser una herramienta fundamental para el desarrollo de esta investigación, ya que permitió identificar las estructuras mentales construidas por los participantes para comprender el CSSIL, así como conocer las conexiones cartesianas que establecieron para el conjunto solución de la ecuación, inecuación y sistemas de inecuaciones. Por esta razón, coincidimos con las posturas de Moon (2020) y Trigueros y Martínez-Planell (2010), quienes mencionan que la entrevista es un buen instrumento metodológico para identificar las estructuras y mecanismos mentales que los participantes muestran durante una investigación con APOE, y que quizás no podrían observarse solo a través de las tareas.

Una de las contribuciones de este estudio radica en mostrar las estructuras y mecanismos mentales que un estudiante podría emplear para comprender el CSSIL, proporcionando así una herramienta valiosa para profesores e investigadores en Educación Matemática. Estos resultados pueden ser aprovechados por los profesores en el diseño de actividades para el aula y por los investigadores en la planificación de investigaciones que fomenten la construcción de las estructuras proceso y objeto del CSSIL.

En esta investigación hemos identificado dos limitaciones. La primera se refiere a la cantidad de estudiantes analizados, ya que solo presentamos el análisis de los tres participantes entrevistados. Por lo tanto, sugerimos que en futuras investigaciones sobre el CSSIL se analice un número mayor de participantes para obtener una perspectiva más amplia. La segunda se relaciona con el tipo de tareas diseñadas, en las cuales consideramos que sería pertinente incluir en futuras investigaciones actividades que promuevan que los estudiantes realicen transformaciones en la representación gráfica del CSSIL, así como también que transiten del registro gráfico al algebraico.

Conclusiones

Los resultados de esta investigación muestran que los estudiantes construyen la estructura objeto del CSSIL al coordinar la estructura proceso del CSIL con la estructura proceso de intersección de conjuntos, tal como se había propuesto en la DGP sobre el CSSIL. Además, encontramos que los participantes asociaban la representación gráfica del CSSIL con polígonos o regiones. En la DGP se planteó la hipótesis de que para construir la estructura objeto del CSSIL era necesario que los estudiantes hubieran construido previamente la estructura objeto del CSIL. Esta hipótesis se verificó con el participante Julián, quien no logró construir la estructura objeto del CSSIL debido a sus dificultades para establecer la estructura objeto del CSIL.

Los participantes que exhibieron una estructura de acción, proceso u objeto para el conjunto solución de una ecuación o inecuación, mostraban el mismo tipo de estructura para el CSSIL. Es decir, si un participante construyó el CSIL en la estructura de proceso, también evidenciaba la estructura de proceso para el CSSIL. Por ejemplo, durante la resolución de las tareas y al responder las preguntas de la entrevista semiestructurada, Fernando demostró la estructura de objeto para el CSIL, misma estructura que construyó para el CSSIL, como se describe en la sección 5.5.

La articulación de APOE y Conexión Cartesiana la consideramos útil para describir la representación gráfica y la comprensión de objetos matemáticos como inecuaciones en dos variables, sistemas de inecuaciones y funciones en una o dos variables. Esta perspectiva teórica presenta similitudes con la propuesta de Trigueros y Martínez-Planell (2010), que vincula la APOE con la teoría de registros semióticos. Ambas articulaciones entre estos marcos teóricos permiten estudiar cómo los estudiantes comprenden los objetos matemáticos a través de representaciones algebraicas y gráficas.

Consideramos que la investigación sobre el CSSIL representa una contribución significativa al campo de la Educación Matemática, en el contexto de las inecuaciones. Este estudio amplía la investigación existente, que hasta ahora se había centrado principalmente en inecuaciones de una sola variable, al explorar el CSSIL.

Autorización del comité de ética

Este documento fue revisado y aprobado para su publicación por el comité de ética de la universidad. Además, los participantes fueron informados previamente sobre el estudio y firmaron un consentimiento voluntario.

Conflicto de intereses

Los autores declaran no tener algún conflicto de interés.

Declaración de la contribución de los autores

Todos los autores afirmamos que se leyó y aprobó la versión final de este artículo. Ambos autores contribuimos en todos los elementos de la investigación en 60% y 40% respectivamente.

Referencias

Abramovich, S., & Connell, M. L. (2015). Digital fabrication and hidden inequalities: Connecting procedural, factual, and conceptual knowledge. *International Journal of Technology in Teaching and Learning*, *11*(2), 76–89.

Abramovich, S., & Ehrlich, A. (2007). Computer as a medium for overcoming misconceptions in solving inequalities. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching*, *26*(3), 181–196.

Arnon, L., Cottill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa-Fuentes, S., Trigueros, M., & Weller, K. (2014). *APOS Theory a framework for research and curriculum education*. Springer Science+Business Media.

Blanco, L. J., & Garrote, M. (2007). Difficulties in learning inequalities in students of the first year of pre-university education in Spain. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, *3*(3), 221–229. https://doi.org/10.12973/ejmste/75401

Borji, V., Font, V., Alamolhodaei, H., & Sánchez, A. (2018). Application of the complementarities of two theories, APOS and OSA, for the analysis of the university students' understanding on the graph of the function and its derivative. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, *14*(6), 2301–2315. https://doi.org/10.29333/ejmste/89514

Borji, V., & Martínez-Planell, R. (2020). On students' understanding of implicit differentiation based on APOS theory. *Educational Studies in Mathematics*, *105*(2), 163–179. https://doi.org/10.1007/s10649-020-09991-y

Brijlall, D., & Ndlazi, N. J. (2019). Analysing engineering students' understanding of integration to propose a genetic decomposition. *Journal of Mathematical Behavior*, *55*(September), 100690. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2019.01.006

Çekmez, E. (2021). Investigating the effect of computer-supported instruction on students' understanding of different representations of two-variable inequalities. *Interactive Learning Environments*, 1–21. https://doi.org/10.1080/10494820.2021.1926288

Chamberlain, D., & Vidakovic, D. (2021). Cognitive trajectory of proof by contradiction for transition-to-proof students. *Journal of Mathematical Behavior*, *62*(June), 100849. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2021.100849

Çiltaş, A., & Tatar, E. (2011). Diagnosing Learning Difficulties Related to the Equation and Inequality that Contain Terms with Absolute Value. *International Online Journal of Educational Sciences*, *3*(2), 461–473. www.iojes.net

Dubinsky, E. (1991). Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinking. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 95–126). Springer Netherlands.

Dubinsky, E., Weller, K., McDonald, M. A., & Brown, A. (2005). Some historical issues and paradoxes regarding the concept of infinity: An APOS-based analysis: Part 1. *Educational Studies in Mathematics*, *58*(3), 335–359. https://doi.org/10.1007/s10649-005-2531-z

Edwards, T. G., & Chelst, K. R. (1999). Promote Systems of Linear Inequalities with Real-World Problems. *The Mathematics Teacher*, *92*(2), 118–123. https://doi.org/10.5951/mt.92.2.0118

El-khateeb, M. (2016). Errors Analysis of Solving Linear Inequalities among the Preparatory Year Students at King Saud University . *Journal of Education and Practice*, *7*(12), 124–133. www.iiste.org

Font, V., Trigueros, M., Badillo, E., & Rubio, N. (2016). Mathematical objects through the lens of two different theoretical perspectives: APOS and OSA. *Educational Studies in Mathematics*, *91*(1), 107–122. https://doi.org/10.1007/s10649-015-9639-6

García-Martínez, I., & Parraguez, M. (2017). The basis step in the construction of the principle of mathematical induction based on APOS theory. *Journal of Mathematical Behavior*, *46*(April), 128–143. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2017.04.001

Kabaca, T. (2013). Using dynamic mathematics software to teach one-variable inequalities by the view of semiotic registers. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, *9*(1), 73–81. https://doi.org/10.12973/eurasia.2013.917a

Martinez-Planell, R. (2021). Multivariable calculus results in different countries. *ZDM–Mathematics Education*, *53*. https://doi.org/10.1007/s11858-021-01233-6

Martínez-Planell, R., & Trigueros, M. (2012). Students' understanding of the general notion of a function of two variables. *Educational Studies in Mathematics*, *81*(3), 365–384. https://doi.org/10.1007/s10649-012-9408-8

Martínez-Planell, R., & Trigueros, M. (2019). Using cycles of research in APOS: The case of functions of two variables. *Journal of Mathematical Behavior*, *55*(September), 100687. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2019.01.003

Moon, K. (2020). New approaches for two-variable inequality graphs utilizing the Cartesian Connection and the APOS theory. *Educational Studies in Mathematics*, *104*(3), 351–367. https://doi.org/10.1007/s10649-020-09956-1

Moon, K., Brenner, M. E., Jacob, B., & Okamoto, Y. (2013). Prospective Secondary Mathematics Teachers' Understanding and Cognitive Difficulties in Making Connections among Representations. *Mathematical Thinking and Learning*, *15*(3), 201–227. https://doi.org/10.1080/10986065.2013.794322

Moschkovich, J., Schoenfeld, A., & Arcavi, A. (1993). Aspects of Understanding: On Multiple Perspectives and Representations of Linear Relations and Connections Among Them: Judit Moschkovich, Alan H. Schoenfeld, and Abraham Arcavi. In *Integrating Research on the Graphical Representation of Functions* (pp. 69–100). https://doi.org/10.4324/9780203052617-9

Ndlovu, L., & Ndlovu, M. (2020). The effect of graphing calculator use on learners' achievement and strategies in quadratic inequality problem solving. *Pythagoras*, *41*(1), 1–13. https://doi.org/10.4102/pythagoras.v41i1.552

Paoletti, T., Stevens, I. E., & Vishnubhotla, M. (2021). Comparative and restrictive inequalities. *Journal of Mathematical Behavior*, *63*(July), 100895. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2021.100895

Salgado, H., & Trigueros, M. (2015). Teaching eigenvalues and eigenvectors using models and APOS Theory. *Journal of Mathematical Behavior*, *39*, 100–120. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2015.06.005

Schreiber, I., & Tsamir, P. (2012). Different Approaches to Errors in Classroom Discussions: The Case of Algebraic Inequalities. *Investigations in Mathematics Learning*, *5*(1), 1–20. https://doi.org/10.1080/24727466.2012.11790317

Switzer, M. (2014). Graphing inequalities, connecting meaning. *The Mathematics Teacher*, *107*(8), 580–584. http://www.jstor.org/stable/10.5951/mathteacher.107.8.0580

Tamba, K. P., Saragih, M. J., & Listiani, T. (2018). Learning Trajectory of Quadratic Inequality. *JOHME: Journal of Holistic Mathematics Education*, *2*(1), 12–21. https://doi.org/10.19166/johme.v2i1.1202

Trigueros, M., & Martínez-planell, R. (2010). Geometrical representations in the learning of two-variable functions. *Educational Studies in Mathematics*, *73*(1), 3–19. https://doi.org/10.1007/s10649-009-9201-5

Trigueros, M., & Oktaç, A. (2019). Task design in APOS theory. *Avances de Investigacion En Educacion Matematica*, *15*, 43–55. https://doi.org/10.35763/aiem.v0i15.256

Tsamir, P., & Almog, N. (2001). Students' strategies and difficulties: The case of algebraic inequalities. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *32*(4), 513–524. https://doi.org/10.1080/00207390110038277

Váquez, C., & Parraguez, M. (2015). Construcciones mentales para el aprendizaje de conceptos básicos del álgebra lineal. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, *26*(3), 37–74.

Verikios, P., & Farmaki, V. (2010). From equation to inequality using a function-based approach. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *41*(4), 515–530. https://doi.org/10.1080/00207390903564611