

Estado da publicação: Não informado pelo autor submissor

Campos magnéticos em um cilindro supercondutor pelo modelo de London

Danilo Lessa Bernardineli

<https://doi.org/10.1590/SciELOPreprints.7852>

Submetido em: 2024-01-05

Postado em: 2024-01-15 (versão 1)

(AAAA-MM-DD)

Campos magnéticos em um cilindro supercondutor pelo modelo de London

Describing Magnetic Fields on a Superconducting Cylinder through London's Model

Danilo Lessa Bernardineli
Instituto de Física, Universidade de São Paulo
Rua do Matao 1371, Sao Paulo/SP, Brasil.
<https://orcid.org/0000-0003-3814-9524>
(Dated: 09 de Dezembro de 2018)

Resumo: Neste trabalho, desenvolverá-se expressões para o potencial vetor e o campo magnético originário de um cilindro supercondutor infinito de acordo com a equação de London e de modo a discutir o artigo de Miguel C. N. Fiolhais e Hanno Essén ao mesmo tempo em que são feitas visualizações para a configuração do campo magnético - os quais indicam o surgimento e evolução de vórtices e turbulência internamente e externamente conforme o cilindro passa de um estado normal para um supercondutivo. Por último, são colocados ingredientes para uma eventual tentativa de caracterizar a corrente dos elétrons superfluidos no supercondutor.

Palavras-chave: eletromagnetismo clássico, modelo de london, supercondutores

Abstract: In this work, expressions will be developed for the vector potential and the magnetic field originating from an infinite superconducting cylinder in accordance with the London equation and in order to re-discuss the article by Miguel C. N. Fiolhais and Hanno Essén at the same time as visualizations are made for the configuration of the magnetic field - which indicate the emergence and evolution of vortices and turbulence internally and externally as the cylinder passes from a normal to a superconductive state. Finally, ingredients are placed for a possible attempt to characterize the current of superfluid electrons in the superconductor.

Keywords: classical electromagnetism, london model, superconductors

O Autor declara não haver nenhum conflito de interesse.

I. INTRODUÇÃO

A. Objetivos

Neste escrito, fará-se uma rediscussão do artigo "Magnetic field expulsion from an infinite cylindrical superconductor" dos autores Miguel C. N. Fiolhais e Hanno Essén [1], o qual diz respeito a dedução dos campos magnéticos externos e interiores a um cilindro supercondutor no qual as equações de London são válidas.

Os objetivos nessa rediscussão são discutir e explicitar os passos intermediários da dedução com maiores detalhes e identificar um plano de ação para caracterizar a corrente de superfluido associado ao supercondutor. Por último, é estudado a composição do campo magnético para diferentes λ .

B. Modelo de London para a supercondutividade

O modelo de London é o primeiro modelo fenomenológico desenvolvido para um material que apresenta tanto condutividade perfeita quanto a presença do efeito Meissner-Ochsenfeld: a expulsão do campo magnético de modo que haja somente uma dependência no estado atual do sistema, sem dependência temporal em relação ao estado anterior do material. [2].

Nesse contexto, a descrição de acordo com London foi amplamente explorada na literatura para fins didáticos devido a sua simplicidade e historicidade, sendo costumário citá-lo na introdução em livros-textos sobre supercondutividade. [1]

O modelo de London pode ser enunciado, utilizando o formalismo do potencial vetor, como sendo expresso pela eq. 1, onde \vec{J} é a densidade de corrente associada a um superfluido eletrônico, λ é o fator conhecido como profundidade de penetração de London - o qual se associa com o número de elétrons superfluidos (n_s) pela eq. 2, e \vec{A} é o potencial vetor tal que o campo magnético se dá por $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$. [1] [2]

A principal hipótese de trabalho para o modelo é a tese de que na transição de um estado normal para um estado supercondutivo, uma fração dos elétrons do sólido se tornam superfluidos, o que faz com que esses elétrons se movam sem dissipação e portanto sem resistência - o que geraria um "curto circuito" e anularia a resistividade do material. Uma derivação detalhada da equação da eq. de London pode ser encontrada no livro "Superconductivity, Superfluids and Condensates", de James F. Annett. [2]

$$\vec{J} = -\frac{1}{\lambda^2} \vec{A} \quad (1)$$

$$\lambda = \left(\frac{m_e}{\mu_0 n_s e^2} \right)^{1/2} \quad (2)$$

No artigo segundo Miguel e Hanno, propõe-se uma resolução detalhada do caso onde há um supercondutor cilíndrico de largura infinita e descrito pelo modelo de London de tal modo que ele tenha um raio de tamanho finito e esteja sob influência de um campo externo perpendicular ao eixo de simetria. [1]

O resultado dos autores é a dedução do campo magnético interior e exterior ao cilindro, a dedução da componente paralela ao eixo de simetria para o potencial vetor e uma consequente discussão e visualização destes.

Nas próximas seções, irei reapresentar a solução original dos autores visando explicitar melhor os passos intermediários bem como irei apresentar uma discussão mais aprofundada acerca da configuração do campo magnético em si.

II. DESENVOLVIMENTO

A. Formulação do sistema e condições de contorno

No sistema proposto, temos um cilindro supercondutor sujeito a eq. de London cujo eixo de simetria está alinhado ao eixo \hat{z} com raio de tamanho R bem como um campo magnético externo \vec{B}_0 constante na direção \hat{y} dado pela eq. 3.

$$\vec{B}_0 = B_0 \hat{y} = B_0 (\hat{\theta} \cos \theta + \hat{\rho} \sin \theta) \quad (3)$$

Assumindo um sistema estático e supondo a escolha de calibre para o vetor potencial como sendo a de Coulomb ($\nabla \cdot \vec{A} = 0$), teremos que a formulação potencial das equações de Maxwell serão dadas pelas equações 5 e 4

$$\nabla^2 \vec{A} + \mu_0 \vec{J} = 0 \quad (4)$$

$$\nabla^2 V = \frac{-\rho_e}{\epsilon_0} \quad (5)$$

Por simplicidade, ou para tornar o texto mais idêntico com o artigo rediscutido, assumirei que $\mu_0 = 1$ no restante do texto. Ademais, o vetor potencial no exterior da esfera pode ser obtido assumindo $\vec{J} = 0$ (eq. 7) e no interior utiliza-se a eq. de London para a densidade de corrente, resultando na eq. 6.

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{\vec{A}}{\lambda^2} = 0, \rho \leq R \quad (6)$$

$$\nabla^2 \vec{A} = 0, \rho > R \quad (7)$$

Sendo assim, enuncia-se agora as condições de contorno, nas quais se citam quatro: A equivalência do vetor potencial para distâncias longas com o esperado diante do campo magnético externo, a continuidade do vetor potencial nas bordas do cilindro, a inexistência de correntes superficiais puras na borda do cilindro devido a existência de uma corrente interna e a regularidade do vetor potencial no interior do cilindro. As quatro condições são expressas pelas eqs. 8, 9, 10 e 11.

$$\vec{B}(\rho \rightarrow \infty) = B_0 \hat{y} = B_0 (\cos \phi \hat{\phi} + \sin \phi \hat{\rho}) \quad (8)$$

$$\vec{A}(\rho = (R + \epsilon)) = \vec{A}(\rho = (R - \epsilon)) \quad (9)$$

$$\hat{n} \times [\vec{B}(\rho = (R + \epsilon)) - \vec{B}(\rho = (R - \epsilon))] = 0 \quad (10)$$

$$\vec{A}(\rho = 0) \in \mathbb{R} \quad (11)$$

Por último, há a simetria do problema que faz com que o vetor potencial e o campo magnético não variem ao longo do eixo \hat{z} , isto é: $\frac{\partial \vec{B}}{\partial z} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial z} = 0$

B. Resolução do sistema

A resolução ocorrerá inicialmente desenvolvendo as expressões gerais para o potencial vetor na região interna e externa do sistema. Feito isso, serão implementadas as condições de contorno associadas ao campo externo bem como a continuidade e regularidade do sistema.

Inicia-se resolvendo o sistema para o caso livre onde o potencial vetor é dada pela eq. 7, o qual pode ser expandido em coordenadas cilíndricas na eq. 12, e que por vez possui os laplacianos expressos pela eq. 13. Formidável.

$$\begin{aligned} \nabla^2 \vec{A} = & (\nabla^2 A_\rho - \frac{A_\rho}{\rho^2} - \frac{2\partial A_\phi}{\rho^2 \partial \phi}) \hat{\rho} \\ & + (\nabla^2 A_\phi - \frac{A_\phi}{\rho^2} - \frac{2\partial A_\rho}{\rho^2 \partial \phi}) \hat{\phi} \\ & + \nabla^2 A_z \hat{z} = 0 \end{aligned} \quad (12)$$

$$\nabla^2 A_z = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 A_z}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} \quad (13)$$

Felizmente, o campo magnético possui dependência somente em A_z , o que pode ser demonstrado ao fazer o cálculo manual pela definição e impor que não haja componente de \vec{B} em \hat{z} .

$$\begin{aligned} \vec{B} = \nabla \times \vec{A} = & \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z} \right) \hat{\rho} \\ & + \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right) \hat{\phi} \\ & + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial(\rho A_\phi)}{\partial \rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial \phi} \right) \hat{z} \end{aligned} \quad (14)$$

Os termos com derivadas em relação a z devem ser nulos devido a condição de simetria do problema, no qual o vetor potencial não deve variar ao longo do eixo \hat{z} . Tem-se também a condição da componente magnética ser nula em \hat{z} , o que faz com que a forma de \vec{B} depende somente de A_z , conforme a eq. 15. A implementação destas condições também cria um vínculo entre A_ρ e A_ϕ , dado pela eq. 16. Note que essa dependência utiliza somente a simetria em \hat{z} como hipótese, e portanto é válido tanto no interior quanto no exterior do cilindro.

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \phi} \hat{\rho} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \hat{\phi} \quad (15)$$

$$\frac{\partial(\rho A_\phi)}{\partial \rho} = \frac{\partial A_\rho}{\partial \phi} \quad (16)$$

Sendo assim, pega-se um atalho para fins de calcular o campo: $\vec{A} = A_z \hat{z}$ e a eq. 12 se reduz para simplesmente a eq. 13. Porém há um custo nisso: é necessário saber todas as componentes de \vec{A} para identificar \vec{J} no interior do cilindro e tal tarefa está além do escopo deste escrito. Um plano de ação para tal está contido em seção posterior.

A solução para a equação de Laplace cilíndrica é bem conhecida e possui a forma dada pela eq. 17

$$A_z = \sum_{n=0}^{\infty} [A_n \cos n\phi + B_n \sin n\phi] [C_n \rho^n + D_n \rho^{-n}] \quad (17)$$

O próximo passo é a aquisição de uma expressão geral para A_z no interior do cilindro, que é dado pela resolução da eq 13 na eq. 6. A solução geral é apresentada pela eq. 18, no qual I_n e K_n são as funções cilíndricas e modificadas de Bessel do primeiro e segundo tipo respectivamente. [1]

$$A_z = \sum_{n=0}^{\infty} [E_n \cos n\phi + F_n \sin n\phi] [G_n I_n(\rho/\lambda) + H_n K_n(\rho/\lambda)] \quad (18)$$

Estamos de posse então dos ingredientes para começar a implementar as condições de contorno. O primeiro passo é implementar a condição dada pela eq. 8, que diz respeito ao contorno quando $\rho \rightarrow \infty$. O potencial vetor que dá origem ao campo magnético externo é dado pela eq. 19, onde $A_1 C_1 = -B_0$.

$$A_z = A_1 (C_1 \rho + D_1 \rho^{-1}) \cos \phi + K \quad (19)$$

O próximo passo é implementar a regularidade do potencial vetor em $\rho = 0$, o que faz com que $H_n = 0$ dado que a função modificada de Bessel do segundo tipo diverge: $K_n(\rho \rightarrow 0) \rightarrow \infty$.

Após isso, para assegurar a continuidade de A_z nas bordas do cilindro, são descartados os termos de ordem maior do que 1 na eq. 18 devido a independência linear dos senos e cossenos e devido a solução exterior não contê-los. Consequentemente, A_z no cilindro teve ter a forma dada pela eq. 20

$$A_z = E_0 G_0 I_0(\rho/\lambda) + E_1 G_1 I_1(\rho\lambda) \cos \phi \quad (20)$$

Novamente por independência linear dos cossenos, podemos igualar o fator do cosseno na eq. 20 com o da eq. 19 com $\rho = R$, o que nos dará a relação dada pela eq. 21.

$$\begin{aligned} E_1 G_1 I_1(R/\lambda) &= -B_0 R + A_1 + D_1/R \\ E_0 G_0 I_0(R/\lambda) &= K \end{aligned} \quad (21)$$

O passo final das implementações das condições de contorno se dá pela inexistência de correntes superficiais puras (eq. 10), o que implica na igualdade da derivada axial do potencial vetor nas bordas do cilindro, dado pela eq. 22, o qual são dados pelas eqs. 24 e 25.

A derivada de A_z no interior é facilitada usando a relação da eq. 23. [1]

$$\frac{\partial A_z}{\partial \rho^+} = \frac{\partial A_z}{\partial \rho^-} \quad (22)$$

$$\frac{\partial I_v(\rho/\lambda)}{\partial \rho} = I_{v-1}(\rho/\lambda) - \frac{v\lambda}{\rho} I_v(\rho/\lambda) \quad (23)$$

$$\frac{\partial A_z}{\rho^-} = E_1 G_1 [I_0(R/\lambda) - \frac{\lambda}{R} I_1(R/\lambda)] \cos \phi \quad (24)$$

$$\frac{\partial A_z}{\rho^+} = -(B_0 + \frac{A_1 D_1}{R^2}) \cos \phi \quad (25)$$

Ao juntar tudo, é possível eliminar as variáveis A_1, B_1, C_1, E_1 e G_1 . O trabalho é longo, mas o resultado final do potencial vetor é dado pelas eqs. 26 e 27 para a região externa e interna respectivamente.

$$A_{z,\rho>R} = -B_0 [\rho + \frac{2\lambda R I_0(R/\lambda) - R^2 I_1(R/\lambda)}{\rho I_1(R/\lambda)}] \cos \phi \quad (26)$$

$$A_{z,\rho<R} = \frac{K}{I_0(R/\lambda)} I_0(\rho/\lambda) - \frac{2B_0 \lambda}{I_0(R/\lambda)} I_1(\rho/\lambda) \quad (27)$$

Fazendo $\nabla \times \vec{A}$ no atalho dado pela eq. 16, é possível então finalmente obtermos expressões para o campo magnéticos, dados pelas eqs. 28 e 29 para a região interna e externa respectivamente.

$$\begin{aligned} \vec{B}_{\rho>R} &= B_0 \left(1 - \frac{R^2}{\rho^2} + 2\lambda \frac{R}{\rho^2} \frac{I_1(R/\lambda)}{I_0(R/\lambda)} \right) \sin \phi \hat{\rho} \\ &\quad B_0 \left(1 + \frac{R^2}{\rho^2} - 2\lambda \frac{R}{\rho^2} \frac{I_1(R/\lambda)}{I_0(R/\lambda)} \right) \cos \phi \hat{\phi} \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \vec{B}_{\rho<R} &= 2B_0 \frac{\lambda}{\rho} \frac{I_1(\rho/\lambda)}{I_0(\rho/\lambda)} \sin \phi \hat{\rho} \\ &\quad 2B_0 \left(\frac{I_0(\rho/\lambda)}{I_0(R/\lambda)} - \frac{\lambda}{\rho} \frac{I_1(\rho/\lambda)}{I_0(R/\lambda)} \right) \cos \phi \hat{\phi} \end{aligned} \quad (29)$$

III. DISCUSSÕES

Com a posse da expressão do campo magnético, é possível tomar algumas direções: estudar a densidade de energia associada ao campo magnético $u_B = \frac{B^2}{2\mu_0}$, o que foi realizado pelos autores, ou então estudar a configuração do campo magnético para diferentes λ , que é o que eu farei.

Por último, colocarei uma breve síntese de resultados que podem ser utilizados para caracterizar o potencial vetor em todas as suas componentes, o que possibilitaria identificar a corrente super fluida associada ao sistema.

A. Turbulência e vórtices no campo magnético

Implementando as expressões do campo magnético dada pelas eqs. 28 e 29, é possível fazer uma simulação com o surgimento de alguns efeitos interessantes, como vórtices de campo magnético no interior do cilindro. A simulação foi feita em um notebook online em Python3, o qual pode ser acessado e copiado em <https://goo.gl/rhXPRW>. Os parâmetros adotados foram de $R = 1, B_0 = 1$ para diversos λ . A visualização foi gerada com base em recortes do domínio do campo magnético para melhorar a legibilidade da visualização. Cada sub-figura possui escala independente devido a dificuldade de visulizar os vetores em ordens de grandeza diferente.

Também coloquei as figuras em um website público (<https://goo.gl/ctMToJ>) para poder visualizar as imagens com maior resolução.

Os casos mais interessantes estão citados nas figuras 1, 2 e 3, os quais demonstram a variação do campo magnético conforme a variação do λ . Como λ é associado inversamente com a quantidade de elétrons de superfluido no supercondutor, existe uma interpretação prática de que a transição de λ maiores para $\lambda \rightarrow 0$ deve, em alguma medida, simular a transição de um estado normal para um estado supercondutivo do cilindro.

Ao visualizar as figuras, nota-se que inicialmente, para um $\lambda \gg 0.5$, o campo magnético da configuração é o campo externo, porém entre $\lambda = 0.6$ e 0.2 , começa a surgirem vórtices e turbulências no campo tanto internamente quanto externamente, com um pico de turbulência na região externa em torno de $\lambda = 0.4$. Após isso, conforme λ diminui para abaixo de 0.2 , a turbulência externa passa a se restringir cada vez mais próxima a borda do supercondutor, e os vórtices internos se estabilizam.

Essa turbulência é especialmente interessante pois cria-se a possibilidade de um teste experimental qualitativo para a validação do modelo de London em uma aproximação quasi-estática para a transição de fase supercondutiva. Sugere-se que o procedimento do experimento seja feito de modo que a temperatura do material oscile entre uma temperatura de estado normal e supercondutiva enquanto o campo magnético externo seja mantido constante, e se a teoria de London tiver validade, as medições do campo magnético nas proximidades do supercondutor cilíndrico devem detectar uma turbulência transitória entre o estado inicial e final.

Por último, uma coisa notada é que o sentido do campo magnético interno inverte quase completamente de sentido em algum momento entre $\lambda = 0.5$ e 0.4 .

Há figuras para $\lambda = 0.01, 0.2, 0.4, 0.5$ no website público (<https://goo.gl/ctMToJ>).

Figura 1. Campo magnético para $\lambda = 1$. Nota-se que há a penetração do campo magnético por todo o cilindro.

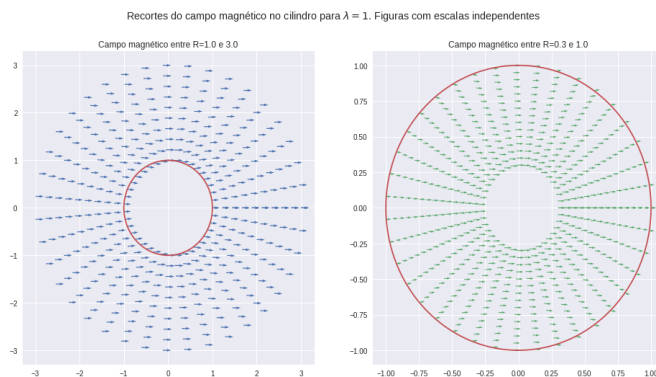


Figura 2. Campo magnético para $\lambda = 0.4$, que é quando começa a ter expulsão do campo magnético no supercondutor. Nota-se a turbulência gerada no entorno e o surgimento de vórtices.

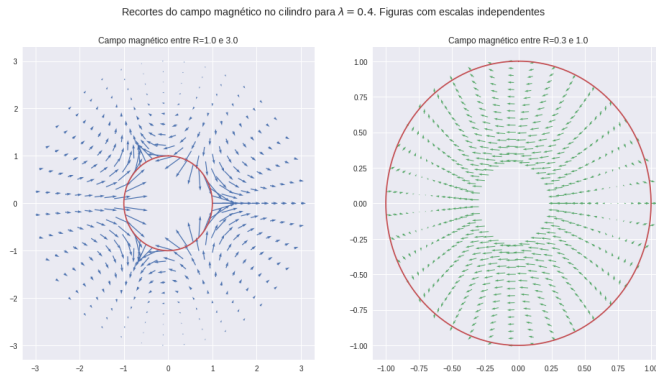
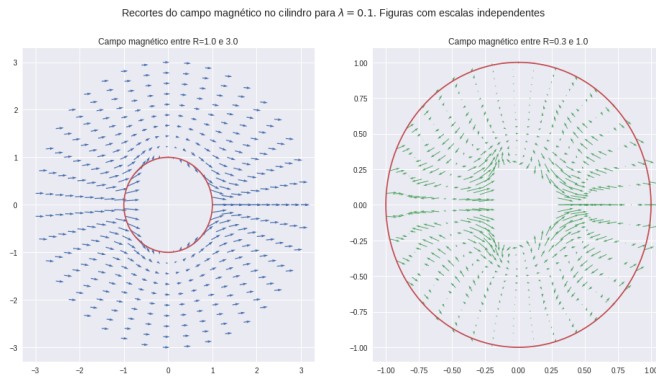


Figura 3. Campo magnético para $\lambda = 0.1$. Nessa situação o campo magnético interior possui vários vórtices e turbulência intensa.



B. Corrente do superfluido

Nesta seção, colocarei alguns ingredientes que podem ser utilizados em uma eventual tentativa de deduzir o vetor potencial e por consequência a corrente de superfluido do sistema.

Para se caracterizar a corrente do superfluido dado a formulação do sistema e hipóteses de trabalho, é necessário saber todas as componentes do potencial vetor no interior do cilindro. Isso implica em resolver a eq. 12 somado a um fator $-\frac{\vec{A}}{\lambda^2}$ para as componentes A_x e A_y usando o laplaciano da eq. 13 em coordenadas cilíndricas. Não consegui elaborar uma solução para esses casos e nem encontrar uma solução acessível na literatura.

Adicionalmente, teria-se de resolver a eq. 12 para o caso livre como modo de implementar as condições de contorno dadas pelas eqs. 8 e 9.

Algumas considerações podem ser usadas para obter relações visando simplificação. A primeira delas é o uso do calibre de Coulomb para obter

$$\nabla \cdot \vec{A} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial A_x}{\partial x} = -\frac{\partial A_y}{\partial y} \quad (\text{coord. cartesiana}) \quad (30)$$

$$\nabla \cdot \vec{A} = 0 \Leftrightarrow \frac{\rho \partial A_\rho}{\partial \rho} = -\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} \quad (\text{coord. cilíndrica}) \quad (31)$$

O fato também de que somente A_z é relevante para obter o campo magnético, impõe um segundo vínculo.

$$\frac{\partial A_y}{\partial x} = \frac{\partial A_x}{\partial y} \quad (\text{coord. cartesiana}) \quad (32)$$

$$\frac{\partial(\rho A_\phi)}{\partial \rho} = \frac{\partial A_\rho}{\partial \phi} \text{ (coord. cilíndrica)} \quad (33)$$

Em cartesiano, é possível expressar o gradiente de A_x e A_y como sendo conjugados:

$$\begin{aligned} \nabla A_x &= \left(-\frac{\partial A_y}{\partial y}, \frac{\partial A_y}{\partial x}, 0 \right) \\ \nabla A_y &= \left(\frac{\partial A_x}{\partial y}, -\frac{\partial A_x}{\partial x}, 0 \right) \end{aligned} \quad (34)$$

IV. CONCLUSÕES

A exploração direta da configuração vetorial do campo magnético resultante permitiu visualizar o surgimento de vórtices e de uma turbulência para diferentes λ , o que é um fenômeno curioso por si só. Dada a associação inversa de λ com o número de elétrons superfluidos segundo o modelo de London, tal turbulência pode ser utilizada como teste experimental quanto ao domínio de validade da teoria para uma transição de fase supercondutora quasi-estática.

Uma continuidade natural desse trabalho seria de buscar caracterizar a corrente de superfluido, o que não é trivial matematicamente e ao mesmo tempo não foi possível encontrar referências sobre a realização de tal na literatura atual.

V. REFERENCIAS

- [1] Magnetic field expulsion from an infinite cylindrical superconductor, Miguel C.N. Fiolhais, Hanno Essén
 [2] Superconductivity, Superfluids and Condensates. James F. Annett. Cap 1, pgs 2-22.

VI. APÊNDICE

A. Código para geração de imagens

```
# Dependencias
from scipy.special import jv as I
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Parametros de simulacao
R = 1
B_0 = 1

def B_exterior(rho, phi, lamb=0.1):
    t_1 = 1
    t_2 = (R ** 2) / (rho ** 2)
    t_3 = 2 * lamb * R / (rho ** 2)
    t_3 *= I(1, R / lamb) / I(0, R / lamb)
    B_rho = B_0 * (t_1 - t_2 + t_3) * np.sin(phi)
    B_phi = B_0 * (t_1 + t_2 - t_3) * np.cos(phi)
    return (B_rho, B_phi)

def B_interior(rho, phi, lamb=0.1):
    termo = (lamb / rho) * I(1, rho / lamb) / I(0, R / lamb)
    B_rho = 2 * B_0 * termo * np.sin(phi)
    B_phi = I(0, rho / lamb) / I(0, R / lamb)
    B_phi += -termo
    B_phi *= 2 * B_0 * np.cos(phi)
    return (B_rho, B_phi)

# So uma funcao auxiliar
def generate(R_min, R_max, func, N_rho=10, N_phi=40, lamb=0.1):
    rhos = np.linspace(R_min, R_max, N_rho)
    phis = np.linspace(0, 2 * np.pi, N_phi)

    phi, rho = np.meshgrid(phis, rhos)
    B = func(rho, phi, lamb=lamb)
    B_rho = B[0]
    B_phi = B[1]

    x = rho * np.cos(phi)
    y = rho * np.sin(phi)
    B_x = B_phi * np.cos(phi) + B_rho * np.sin(phi)
```

```

B_y = -B_phi * np.sin(phi) + B_rho * np.cos(phi)
return (x, y, B_x, B_y)

# Gerar a borda do cilindro
theta_circulo = np.linspace(0, 2 * np.pi, 500)
x_circulo = R * np.sin(theta_circulo)
y_circulo = R * np.cos(theta_circulo)

# Mude a vontade
lamb = 0.1

f, axes = plt.subplots(1,2, figsize=(16, 8))
for ax in axes:
    ax.plot(x_circulo, y_circulo, color="C2", label="Borda_do_cilindro")

B_externo = generate(R, 3 * R, B_exterior, lamb=lamb)
(x, y, B_x, B_y) = B_externo
axes[0].set_title("Campo_magnetico_entre_R=1.0_e_3.0")
axes[0].quiver(x, y, B_x, B_y, color="C0")

B_interno = generate(0.3 * R, R, B_interior, lamb=lamb, N_rho=15)
(x, y, B_x, B_y) = B_interno
axes[1].set_title("Campo_magnetico_entre_R=0.3_e_1.0")
axes[1].quiver(x, y, B_x, B_y, color="C1")

#B_interno = generate(0.2 * R, 0.7 * R, B_interior, lamb=lamb)
#(x, y, B_x, B_y) = B_interno
#axes[2].set_title("Campo_magnetico_entre_R=0.7_e_0.2")
#axes[2].quiver(x, y, B_x, B_y, color="C1")

plt.suptitle("Recortes_do_campo_magnetico_no_cilindro_para_\\lambda={}$._Figuras_com_escalas_independentes".format(lamb))
plt.show()

```

B. Imagens adicionais para o campo magnético

Figura 4. Campo magnético para $\lambda = 1$

Recortes do campo magnético no cilindro para $\lambda = 1$. Figuras com escalas independentes

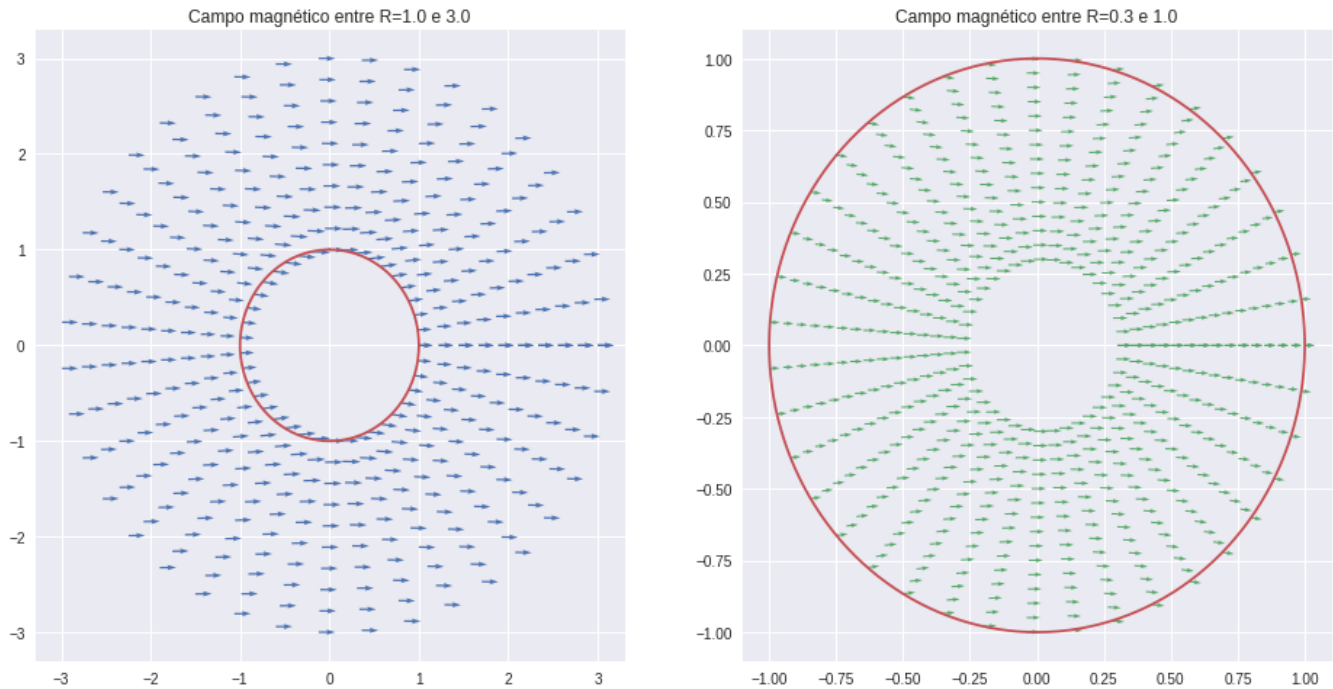


Figura 5. Campo magnético para $\lambda = 0.5$

Recortes do campo magnético no cilindro para $\lambda = 0.5$. Figuras com escalas independentes

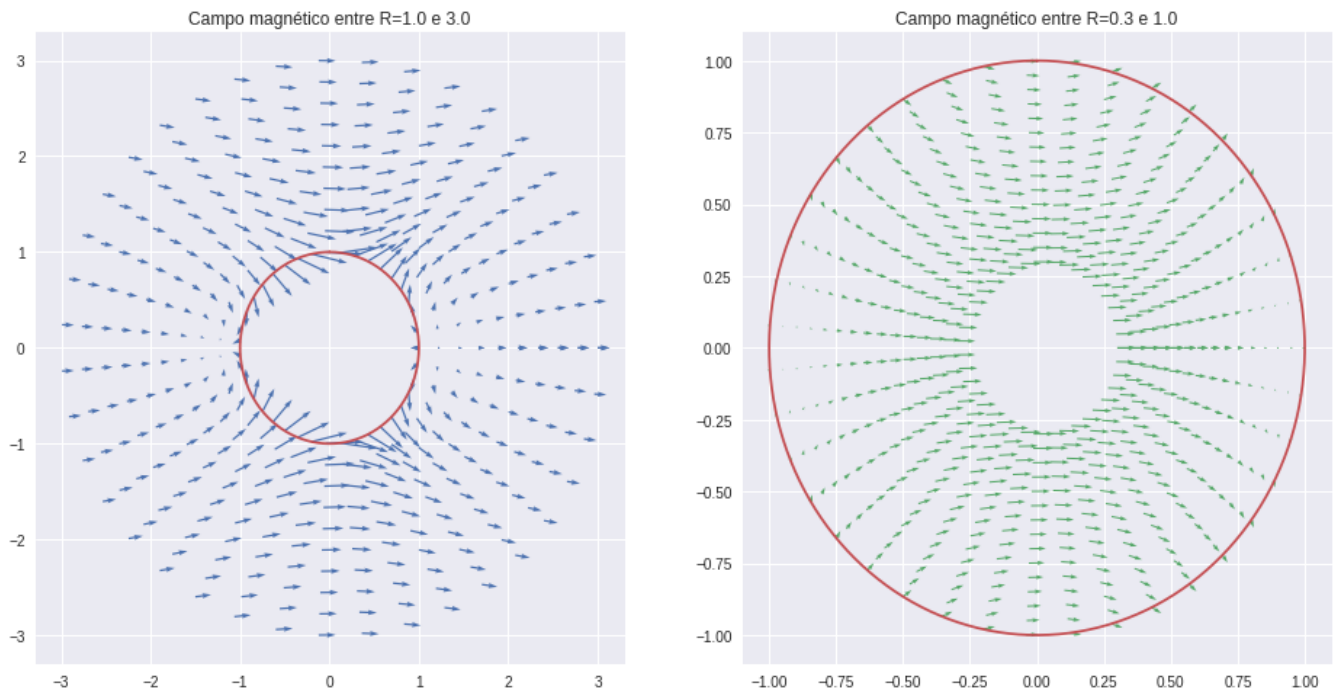


Figura 6. Campo magnético para $\lambda = 0.4$

Recortes do campo magnético no cilindro para $\lambda = 0.4$. Figuras com escalas independentes

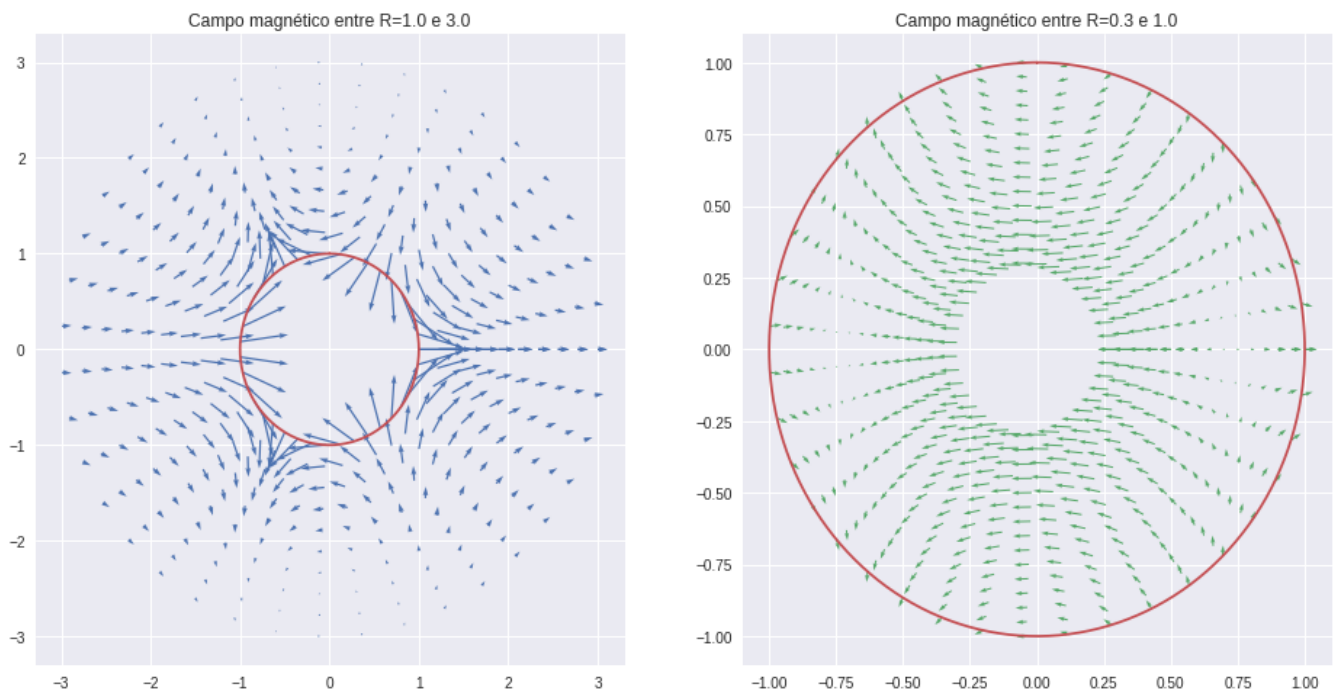


Figura 7. Campo magnético para $\lambda = 0.3$

Recortes do campo magnético no cilindro para $\lambda = 0.3$. Figuras com escalas independentes

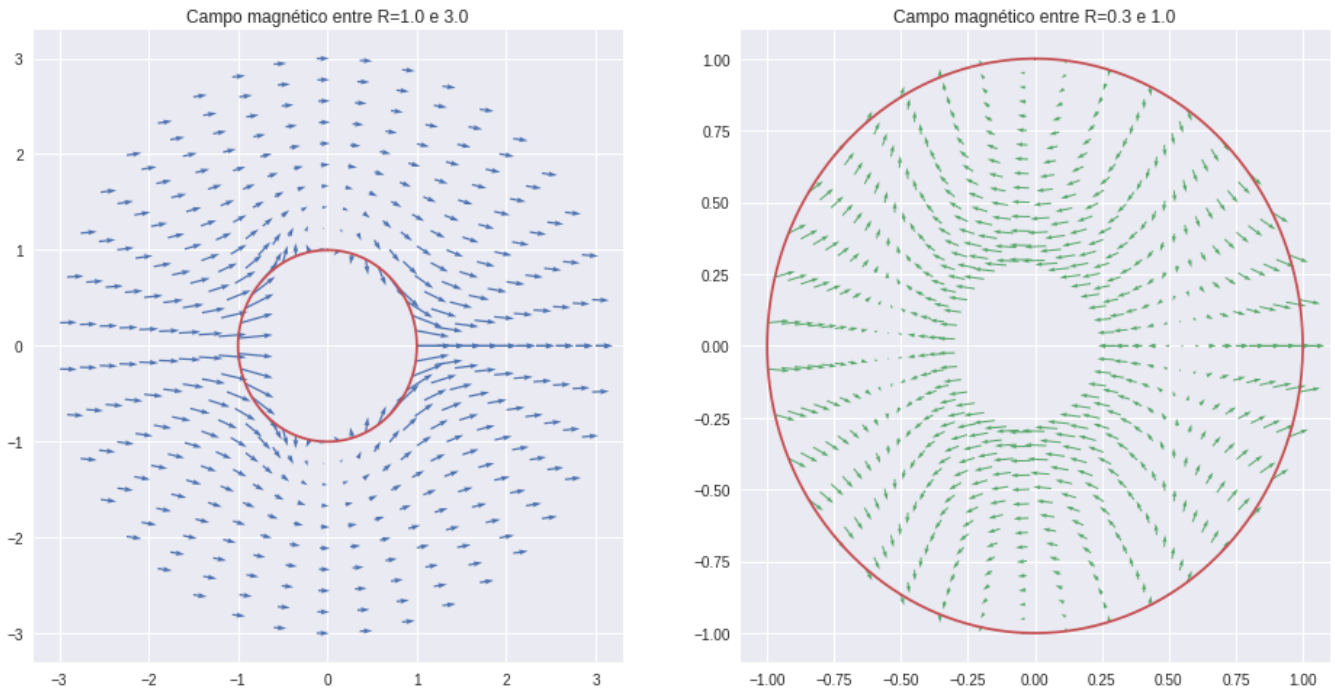


Figura 8. Campo magnético para $\lambda = 0.2$

Recortes do campo magnético no cilindro para $\lambda = 0.2$. Figuras com escalas independentes

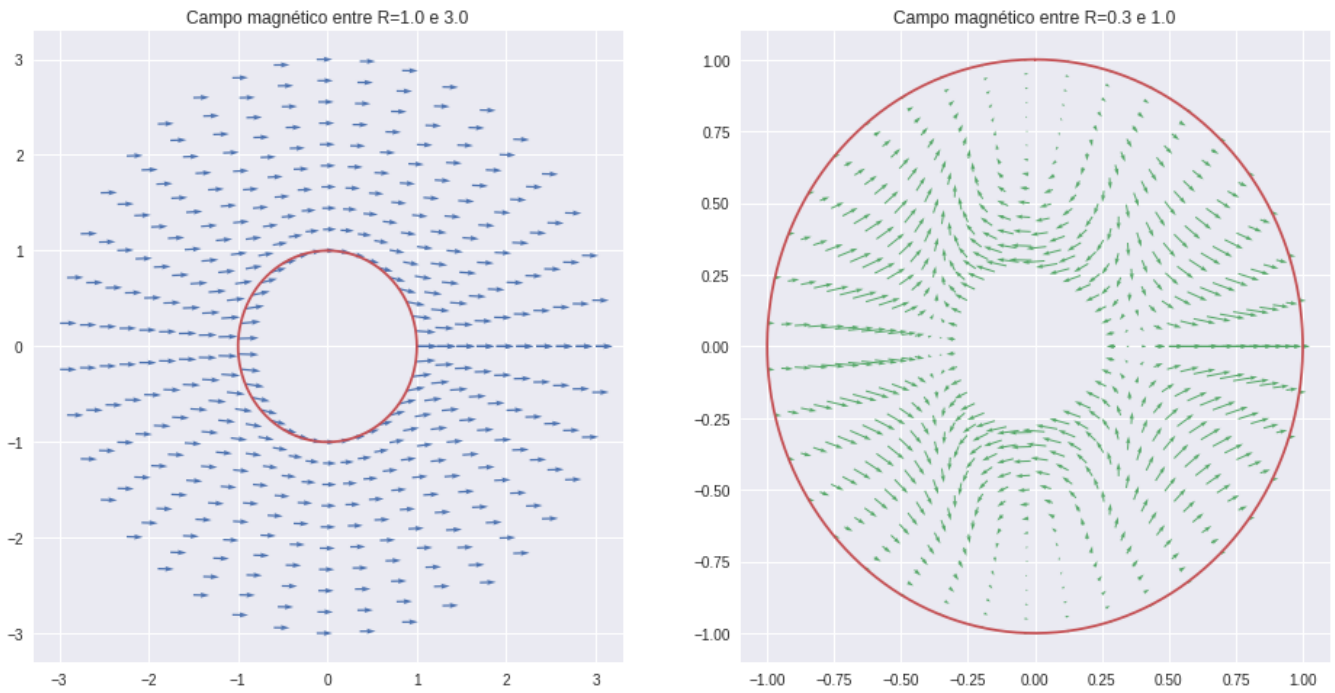


Figura 9. Campo magnético para $\lambda = 0.1$

Recortes do campo magnético no cilindro para $\lambda = 0.1$. Figuras com escalas independentes

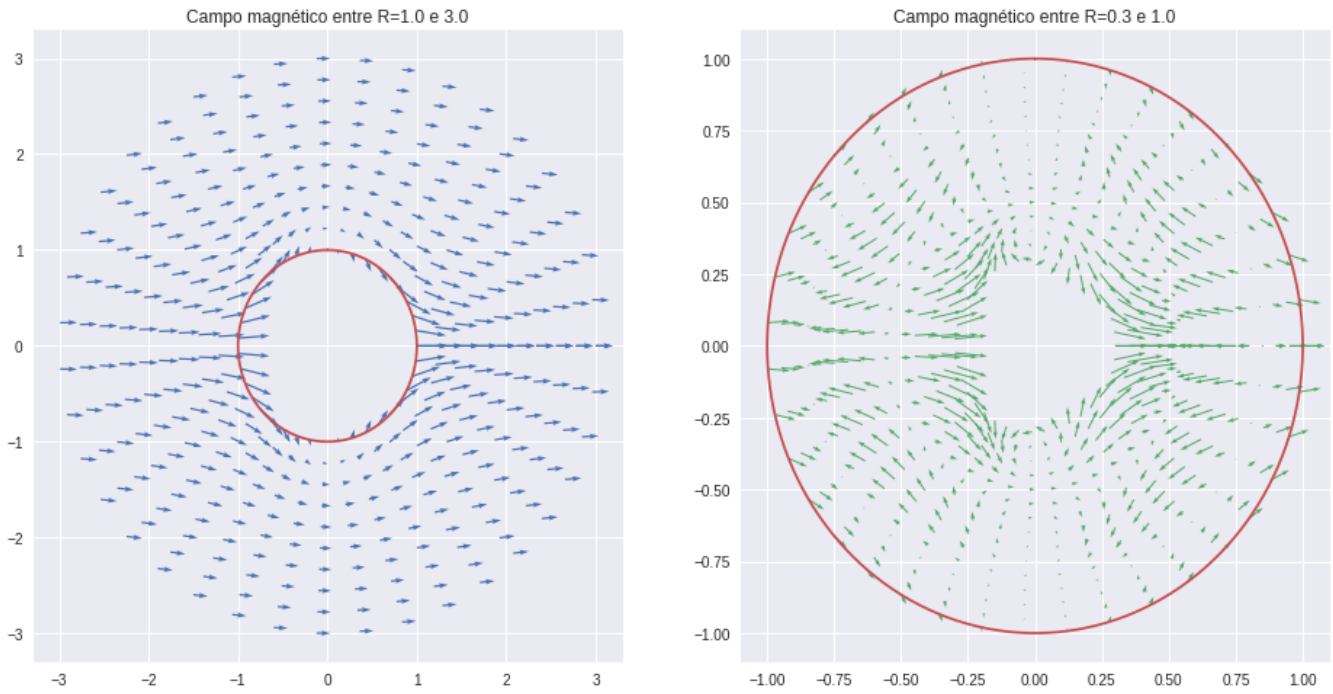
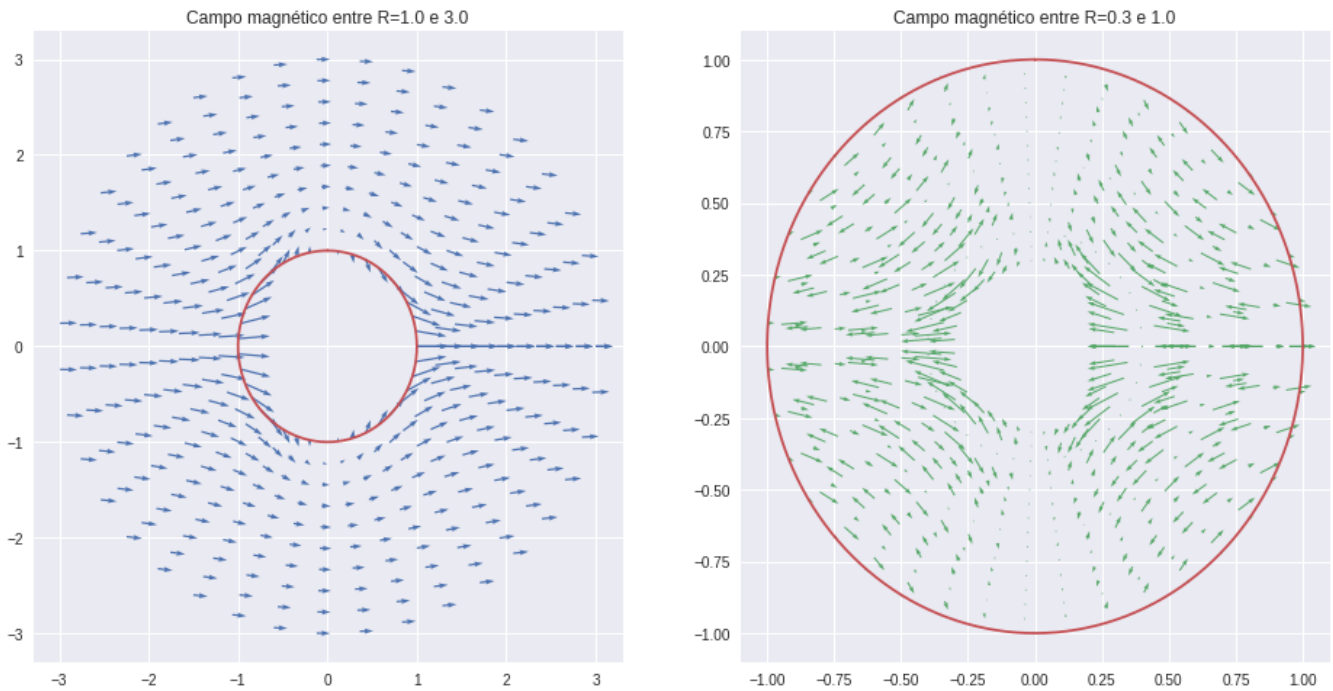


Figura 10. Campo magnético para $\lambda = 0.01$

Recortes do campo magnético no cilindro para $\lambda = 0.01$. Figuras com escalas independentes



Este preprint foi submetido sob as seguintes condições:

- Os autores declaram que estão cientes que são os únicos responsáveis pelo conteúdo do preprint e que o depósito no SciELO Preprints não significa nenhum compromisso de parte do SciELO, exceto sua preservação e disseminação.
- Os autores declaram que os necessários Termos de Consentimento Livre e Esclarecido de participantes ou pacientes na pesquisa foram obtidos e estão descritos no manuscrito, quando aplicável.
- Os autores declaram que a elaboração do manuscrito seguiu as normas éticas de comunicação científica.
- Os autores declaram que os dados, aplicativos e outros conteúdos subjacentes ao manuscrito estão referenciados.
- O manuscrito depositado está no formato PDF.
- Os autores declaram que a pesquisa que deu origem ao manuscrito seguiu as boas práticas éticas e que as necessárias aprovações de comitês de ética de pesquisa, quando aplicável, estão descritas no manuscrito.
- Os autores declaram que uma vez que um manuscrito é postado no servidor SciELO Preprints, o mesmo só poderá ser retirado mediante pedido à Secretaria Editorial do SciELO Preprints, que afixará um aviso de retratação no seu lugar.
- Os autores concordam que o manuscrito aprovado será disponibilizado sob licença [Creative Commons CC-BY](#).
- O autor submissor declara que as contribuições de todos os autores e declaração de conflito de interesses estão incluídas de maneira explícita e em seções específicas do manuscrito.
- Os autores declaram que o manuscrito não foi depositado e/ou disponibilizado previamente em outro servidor de preprints ou publicado em um periódico.
- Caso o manuscrito esteja em processo de avaliação ou sendo preparado para publicação mas ainda não publicado por um periódico, os autores declaram que receberam autorização do periódico para realizar este depósito.
- O autor submissor declara que todos os autores do manuscrito concordam com a submissão ao SciELO Preprints.