

Estado da publicação: Não informado pelo autor submissor

Considerações sobre a Conjectura de Collatz

Audemir Loris

<https://doi.org/10.1590/SciELOPreprints.7664>

Submetido em: 2023-12-08

Postado em: 2024-01-30 (versão 2)

(AAAA-MM-DD)

A moderação deste preprint recebeu o endosso de:

Ricardo Shitsuka (ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2630-1541>)

Justificativa da versão: Correção ortográfica no item 3.3 onde lê-se Calda o correto é Cauda! Inclusão da nota de rodapé 17 e correção do índice superior do somatório de zero passou para UM (ambos no item 4.1.2)

Considerações sobre a Conjectura de Collatz

Considerations on the Collatz Conjecture

Audemir Loris *

Centro Universitário Armando Alvares Penteado - FAAP

<https://orcid.org/0009-0004-8114-9751>

2024, v-1.1

Resumo

Parte da comunidade científica tem dispendido considerável tempo e recursos para de alguma forma validar a conjectura de Collatz, inúmeros esforços tem logrado considerável avanço nesta direção, porém tal conjectura carecia de uma confirmação definitiva de que escolhido um **número ímpar** qualquer $x_i \in \mathbb{N}^*$, obteremos $x_{(i+1)} = 3x_i + 1$, sendo este um número $x_{(i+1)}$ par, divide-se o mesmo pelo número dois (sucessivamente) até obter-se outro **número ímpar** $\in \mathbb{N}^*$, repete-se o processo $x_n = 3x_{(n-1)} + 1$ e divisões por dois até que resulte finalmente um número igual **1**. Neste trabalho apresentam-se deduções, algoritmos e equações que corroboram com tal proposição, embasam tal percepção e conclusão de que a conjectura de Collatz aponta para o ciclo final $4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$.

Palavras-chave: Conjectura de Collatz; Dinâmica Caótica; Ciclo Limite; Orbita periódica; Princípio da indução matemática; Linguagem Python e ‘R’.

Abstract

Part of the scientific community has spent considerable time and resources to somehow validate Collatz's conjecture, countless efforts have achieved considerable progress in this direction, but this conjecture lacked definitive confirmation that choosing an **odd number** any $x_i \in \mathbb{N}^*$, we will obtain $x_{(i+1)} = 3x_i + 1$, this being an even number $x_{(i+1)}$, divide it if the same by the number two (successively) until another **odd number** $\in \mathbb{N}^*$ is obtained, the process $x_n = 3x_{(n-1)} + 1$ and divisions by two until the result is a number equal to **1**. This work presents deductions, algorithms and equations that corroborate this proposition, supporting this perception and conclusion that Collatz's conjecture points to the final cycle $4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$.

Keywords: Collatz conjecture; Chaotic Dynamics; Limit Cycle; Periodic orbit; Principle of mathematical induction; Python and ‘R’ language.

* Professor: Centro Universitário Armando Alvares Penteado - FAAP - (<http://lattes.cnpq.br/0298068164885539>).
email: aloris@faap.br, audemir.loris@gmail.com

1 Introdução

A abordagem direta que busca provas da convergência para a conjunção tem se mostrado indecível, pelo menos qualquer algoritmo baseado na lógica formal tem obtido sucesso apenas parcialmente, ou seja não há atualmente qualquer algoritmo¹ que prove definitivamente tal conclusão, provavelmente com o advento de algoritmos e computadores quânticos seja possível modelar e provar tal conjectura. O uso de números transfinitos ($\aleph_0, \aleph_1, \dots$) bem como os conjuntos que representam permite uma análise de tendência quando $x_i \rightarrow \infty$ sendo $x_i \in \mathbb{N} \rightarrow |\mathbb{N}| = \aleph_0$. Pretende a presente abordagem baseada em processos e simulações obtidas com auxílio de softwares de domínio público conduzir parte das pesquisas na direção de obter uma prova de que a **conjectura de Collatz** tem ciclo final restrito a sequência $4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$.

Apresenta-se no bojo deste artigo resultados que baseados no princípio da indução quando $x_i \rightarrow \infty$ apontam para o ciclo $4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$. Utilizando-se de ferramentas simples e linguagem de programação acessível para o público em geral, abusando-se em alguns casos da “força bruta” na solução dos mesmos algoritmos. O presente trabalho concentra-se em apresentar de forma sucinta a conjectura e seu comportamento tendo em vista as condições de limite. Explorar-se-á abordagens estatísticas e programáticas que cercam os números Naturais de forma bastante simples. Finalmente apresentar-se a uma forma ‘alternativa’² da conjectura, além é claro os programas utilizados nesta busca.

Não seria razoável omitir que a comunidade científica de certa forma aconselha a permanecer distante de tal conjectura⁴ face o fato de que os recursos Matemáticos para solução de tal problema ainda serem desconhecidos³ (ou não terem sido elencados).

Cabe ressaltar ainda que a **conjectura de Collatz**⁴ tem despertado enorme interesse em especial por parte da comunidade jovem que costuma se aventurar neste maravilhoso mundo da Matemática, no qual por vezes não se dá a devida atenção à afirmações corriqueiras e triviais, tais como este simples exemplo: $x_i \in \mathbb{N}^{>1} = \{2, 3, 4, 5, \dots\}$, pode-se afirmar que para qualquer $x_i \in \mathbb{N}^{>1}$, x_i sempre terá como divisor um ou mais números primos (Teorema Fundamental da Aritmética \rightarrow consequência direta da fatoração de números inteiros > 1).

¹ Algoritmo este baseado em lógica formal, booleana ou binária

² Utiliza-se uma equação equivalente para a Conjectura de Collatz que permite estudar o comportamento da mesma quando $x_i \rightarrow \infty$.

³ Disponível em: https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Collatz_conjecture&oldid=1178942543[10]

⁴ ‘The $3x + 1$ problem stands before us as a beautifully simple question. It is hard to resist exploring its structure. We should not exclude it from the mathematical universe just because we are unhappy with its difficulty. It is a fascinating and addictive problem’.[6] (pg. 23)

1.1 Antecedentes

O presente artigo vem acompanhado do uso de algoritmos desenvolvidos em Python e linguagem 'R', quando apresentados serão devidamente notificados bem como sua relevância⁵. Inicialmente apresenta-se o ambiente utilizado para desenvolvimento dos códigos em 'R' e posteriormente em Python (sendo esta linguagem e ambiente preferencialmente utilizada no presente trabalho), lembrar que a interface de programação em 'R' também suporta a programação em Python, quando possível ambas as soluções ou seja em 'R' e Python serão apresentadas permitindo-se assim que o leitor possa optar pelo ambiente que lhe é mais propício.

1.1.1 Instalando PyCharm

Presume-se que o leitor⁶ tenha previamente instalado a linguagem Python em sua máquina, caso não tenha feito o link a seguir fornece o subsídio para tal:

<https://python.org.br/> (em Português)

<https://wiki.python.org/moin/BeginnersGuide/Download> (em Inglês)

Lá você será direcionado para as soluções e plataformas disponíveis. Posteriormente instale o ambiente (IDE) PyCharm a partir do link:

<https://www.jetbrains.com/pt-br/pycharm/download/>

Selecione sua plataforma e baixe a versão Community.

1.1.2 Instalando o Rstudio

Um bom roteiro para baixar e instalar o ambiente 'R' pode ser visto em:

<https://livro.curso-r.com/1-instalacao.html>

Lá siga os passos necessários para sua plataforma.

1.1.3 Testando as instalações

Iniciando com o ambiente 'R', abra o RStudio e crie um arquivo novo (script R) com o seguinte código:

```
1 # Função Collatz presente na biblioteca numbers
2 library(numbers)
3 collatz(7)
```

Fig. 1 – Código: *collatz_1.R*

⁵ Todos os programas apresentados serão disponibilizados via email quando solicitados ao autor e estarão disponíveis no repositório apropriado após publicação, onde inclusive dados sobre instalação e testes serão disponibilizados.

⁶ O leitor que desejar testar os programas, poderá fazê-lo utilizando a linguagem Python, porém esta condição não é limitante para leitura e análise do artigo.

Após salvar o arquivo com o nome *collatz_1.R* e 'roda-lo', você deverá obter a seguinte saída: [1] 7, 22, 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1

A primeira linha do código instrui o ambiente a carregar (instalar) a biblioteca (pacote) *numbers*⁷ que entre as diversas funções contem: a função *Collatz* exibindo a sequencia para: $x_1 = 7$.

Testando o ambiente PyCharm + Python. Abra o PyCharm (veja apêndice C), crie um novo projeto chamado Python_Collatz, além do arquivo main.py inclua outro Collatz_Files.py neste insira o seguinte código:

```

1 # Implementação vetorial
2 def collatz_seq(x):
3     seq = [x]
4     if x < 1:
5         return []
6     while x > 1:
7         if x % 2 == 0:
8             x = x // 2
9         else:
10            x = 3 * x + 1
11            seq.append(x) # Inclui resultado na sequência
12    return seq

```

Fig. 2 – Código: *collatz_seq()*

O programa principal *main.py* será visto oportunamente (anexo C), ative a aba *Collatz_Files.py* e execute o arquivo através da opção *Run File in Python Console* (acesso com botão direito do mouse sobre a função), acesse o console e acione a função *collatz_seq(7)* você deverá obter a seguinte saída:

[7, 22, 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1]

O programa *collatz_1.R* (Fig.1) e a função *collatz_seq(x)* (Fig.2) são versões da sequencia de Collatz definida conforme equação (1)⁸. Uma vez instalado e certificado o ambiente, contemplar-se-a nos próximos itens o desenvolvimento das funções relativas a sequencia de Collatz apresentada em (1) e modificada posteriormente em (2).

$$x_{i+1} = f(x_i) = \begin{cases} \frac{x_i}{2^1} & : \text{ se } x_i \text{ é par} & (1a) \\ 3 \times x_i + 1 & : \text{ se } x_i \text{ é ímpar} & (1b) \end{cases} \quad (1)$$

Note que o expoente do número 2 (dois) sendo 1 (um) implica em uma única divisão por 'passo' ou 'ciclo', ou seja para iterações sucessivas quando x for par somente uma divisão por ciclo, fato este que será adaptado para 2^p posteriormente, onde um único ciclo poderá contemplar mais de uma divisão por 2 (dois).

⁷ (<https://cran.r-project.org/web/packages/numbers/numbers.pdf>)

⁸ Notar que ambas as equações em (1),(1a) e (1b) separadamente são lineares, porém a decisão sobre x_i ser par ou ímpar torna o sistema não linear^[3], fato que será posteriormente modificado pela equação (9)

2 Expandindo a Conjectura de Collatz

Considere a sequência de Collatz apresentada a seguir para $x_1 = 7$:

$$\text{collatz_d}(7)^9 = [7, 22, 11, 34, 17, 52, 13, 40, 5, 16, 1]$$

O código em Python para a função $\text{collatz_d}()$ pode ser visto na Fig. 3, os resultados correspondem respectivamente aos valores $[x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}, x_{11}]$, em outras palavras para esta sequência identifica-se cinco números ímpares x_i (antes do último $x_{11} = 1$ e, cinco números pares, ou seja:

$$x_i \in \mathbb{N}_I = [7, 11, 17, 13, 5] = [x_1, x_3, x_5, x_7, x_9] \mid i = \{1, 3, 5, 7, 9\}$$

Os valores de $x_i \in \mathbb{N}_I$ sendo ímpares serão multiplicados por 3 e somados a unidade ($3x_i + 1$), tal operação resultara em um número obrigatoriamente par que será dividido (enquanto par) por uma potência de 2, são eles:

$$x_i \in \mathbb{N}_P = [22, 34, 52, 40, 16] = [x_2, x_4, x_6, x_8, x_{10}] \mid i = \{2, 4, 6, 8, 10\}$$

Adota-se frequentemente apenas $x_i \in \mathbb{N}^*$ ou $x_i \in \mathbb{N}_I \cup \mathbb{N}_P$, lembrando que índices i ímpares representam os números ímpares, e i pares representam os números pares (para o resultado obtido pela função $\text{collatz_d}(7)$). Ajustando-se as equações em (1) com as devidas modificações obtêm-se:

$$\text{collatz_d}(x) = \begin{cases} \frac{x}{2^\rho} & : \text{ se } x \text{ é par, e } \rho \in \mathbb{N}^* \\ 3 * x + 1 & : \text{ se } x \text{ é ímpar} \end{cases} \quad (2)$$

onde:

$$x_2 = 3 * x_1 + 1 \text{ sendo } x_1 = 7, \quad \implies x_2 = 22$$

$$x_3 = \frac{3*x_1+1}{2^1} \text{ ou } \frac{x_2}{2^1}, \text{ resultando em } \implies x_3 = \frac{22}{2^1} = 11$$

...

$$x_{11} = \frac{x_{10}}{2^4}, \text{ resultando em (este é o último termo)} \implies x_{11} = \frac{16}{2^4} = 1$$

Sequência de Collatz vista na equação (2) e o código a seguir:

```

1 # Implementação ímpar/par
2 def collatz_d(x):
3     seq = []
4     while True:
5         seq.append(x)
6         if x == 1:
7             break
8         if x % 2:
9             x = x * 3 + 1
10        else:
11            while (x % 2) == 0:
12                x = x // 2
13    return seq

```

Fig. 3 – Código: $\text{collatz_d}()$

⁹ A função $\text{collatz_d}()$ otimizada, usa apenas números ímpares iniciais obtendo como resultado intermediário um número par que será dividido por 2^ρ , onde $\rho \in \mathbb{N}^*$, até que resulte em um número ímpar o qual se maior que um é novamente multiplicado por 3 e somado a 1, repetindo-se o processo até que acabe no número 1.

Uma vez conhecidos os valores de x_i , conforme exemplo anterior (*collatz_d(7)* onde $x_1 = 7$) calcula-se a razão entre os sucessivos x_i da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \frac{x_3}{x_2} = \frac{11}{22} = \frac{1}{2^1} \\ \rho_2 &= \frac{x_5}{x_4} = \frac{17}{34} = \frac{1}{2^1} \\ \rho_3 &= \frac{x_7}{x_6} = \frac{13}{52} = \frac{1}{2^2} \\ \rho_4 &= \frac{x_9}{x_8} = \frac{5}{40} = \frac{1}{2^3} \\ \rho_5 &= \frac{x_{11}}{x_{10}} = \frac{1}{16} = \frac{1}{2^4} \end{aligned}$$

Generalizando tem-se: $\rho_i = \frac{x_{(2i+1)}}{x_{(2i)}}$, sendo: $\rho_i = [\frac{1}{2^1}, \frac{1}{2^1}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \frac{1}{2^4}] = [\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}]$.

Reescrevendo as equações em (2):

$$\begin{aligned} x_3 &= (3 * x_1 + 1) * \rho_1 \\ x_5 &= (3 * x_3 + 1) * \rho_2 \\ x_7 &= (3 * x_5 + 1) * \rho_3 \\ x_9 &= (3 * x_7 + 1) * \rho_4 \\ x_{11} &= (3 * x_9 + 1) * \rho_5 \end{aligned}$$

ou ainda com as devidas substituições:

$$x_{11} = (3 * ((3 * ((3 * ((3 * ((3 * x_1 + 1) * \rho_1) + 1) * \rho_2) + 1) * \rho_3) + 1) * \rho_4) + 1) * \rho_5$$

O termo final (neste caso) $x_{11} = 1$, com as devidas operações obteremos a equação a seguir:

$$1 = x_1 * \underbrace{3^5}_{(A)} * \prod_{i=1}^5 (\rho_i) + \underbrace{3^4}_{(B)} * \prod_{i=1}^5 (\rho_i) + \underbrace{3^3}_{(C)} * \prod_{i=2}^5 (\rho_i) + \dots + \underbrace{3^0}_{(D)} * \prod_{i=5}^5 (\rho_i) \quad (3)$$

Pode-se reescrever a equação (3) da seguinte forma:

$$\underbrace{x_1 * 3^I}_{(A)} * \prod_{i=1}^I (\rho_i) + \underbrace{3^{I-1}}_{(B)} * \prod_{i=1}^I (\rho_i) + \sum_{j=(I-2)}^1 \left(\underbrace{3^j}_{(C)} * \prod_{i=(I-j)}^I (\rho_i) \right) + \underbrace{3^0}_{(D)} * (\rho_I) = x_n \quad (4)$$

Nas equações (3) e (4) assume-se que a sequencia de Collatz sempre finaliza no número $x_n = \mathbf{1}$ (**um**) (ciclo final $4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$), rigorosamente obtém-se uma órbita definida pela sequência numérica $1 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow \dots$

3 Considerações sobre Conjectura de Collatz

A equação apresentada em (4) será para efeito de estudo desmembrada em suas quatro partes (A), (B), (C) e (D).

3.1 Cabeça da Conjectura de Collatz (A)

Destaca-se da equação (4) a *cabeça* (A) $\implies h(x_i)$ aonde pode-se contemplar o termo x_i inicial = x_1 :

$$(A) \implies h(x_1) = x_1 * 3^I * \prod_{i=1}^I (\rho_i) \quad (5)$$

Observa-se que para calcular $h(x_1)$ é necessário conhecer os valores de I e $\prod_{i=1}^I (\rho_i)$, a função $r_collatz(\gamma)$ (apresentada na Fig. 4 a seguir) irá fornecer os subsídios necessários. Ao executar a função $r_collatz(\gamma)$ obtêm-se como resposta $\rightarrow [16, 5, 11]$ que correspondem a [C,I,P], ou seja 16 Ciclos (operações) antes de obter 1(um), sendo 5 Impares e 11 Pares.

A função $r_collatz(\gamma)$ informa ainda que $[I] = 5$ (equação (5) $I = 5$), porém $r_collatz(\gamma)$ não fornece os valores de ρ_i , mas indica que o numero total de pares [P] = 11, assim podemos calcular $\prod_{i=1}^I (\rho_i) = \prod_{i=1}^P (\frac{1}{2}) = 2^{-P}$ ou seja:

$$\prod_{i=1}^I (\rho_i) = 2^{-P} \quad \longmapsto \quad \prod_{i=1}^5 (\rho_i) = 2^{-11}$$

De fato obteve-se a partir da função $collatz_d(\gamma)$ vista na figura 3 a sequencia [7, 22, 11, 34, 17, 52, 13, 40, 5, 16, 1] e a partir da fórmula genérica $\rho_i = \frac{x_{2i+1}}{x_{2i}}$ (apresentada posteriormente à figura 3):

$$\prod_{i=1}^5 (\rho_i) = [\frac{1}{2^1} * \frac{1}{2^1} * \frac{1}{2^2} * \frac{1}{2^3} * \frac{1}{2^4}] = 2^{-11}$$

Que permite calcular a *cabeça* (A) de Collatz(7):

$$h(x_1) = x_1 * 3^I * \prod_{i=1}^I (\rho_i) \quad \rightarrow \quad h(7) = 7 * 3^5 * \frac{1}{2^{11}} \simeq 0.83056640625$$

3.1.1 Cabeça da Conjectura de Collatz: Como ficam as potências de 2.

Considere um número $M \in \mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$ e o número inteiro 2^M quando expresso na base binaria terá apenas um dos bit's com valor um, sendo divisível por dois " M " vezes até obter-se o número **um** como resposta final (em binário o bit cujo valor é **um** será deslocado para direita " M " vezes). Ao reavaliar a equação apresentada em (5) e reescreve-la tendo em conta que $x_i = 2^M, I = 0$ e $P = M$, chegamos a seguinte expressão $\implies h(x_i) = 2^M * 3^0 * \rho \mid \rho = \frac{1}{2^M}$, em suma $h(x_i) = 1$ nestes casos, confirmando a validade da equação descrita em (5) para $\forall x_i = 2^M$.

3.2 Pescoço da Conjectura de Collatz (B)

De forma semelhante pode-se calcular o termo (B) visto na equação (4):

$$(B) \implies 3^{I-1} * \prod_{i=1}^I (\rho_i) \rightarrow 3^4 * \frac{1}{2^{11}} \simeq 0.03955078125$$

Pode-se facilmente verificar que $3 * x_1 * (B) = (A)$.

3.3 Cauda da Conjectura de Collatz (D)

Em continuidade calcula-se o termo (D) conforme a equação (4), o termo (C) será calculado posteriormente:

$$(D) \implies t(x_i) = 3^0 * \rho_n \rightarrow t(7) = 1 * \frac{1}{2^4} \simeq 0.0625$$

Verifica-se que o termo (D) é constante (para $x_i \geq 3$ e $x_i \neq 2^M$) pois corresponde a sequencia final $16 \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$ dentro da qual contempla-se o ciclo $1 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$, ou seja de 16 para chegar em 1 divide-se por 2^4 .

3.4 Corpo da Conjectura de Collatz (C)

Observa-se na equação (4) a necessidade prévia de conhecer os valores de x_1 , I e ρ_i , lembrando que $\rho_i = \frac{1}{\gamma_i}$, o fragmento de programa a seguir, mostrado na Fig. 4 apresenta a função $r_collatz(x_1)$ ¹⁰ que irá fornecer tais valores: $r_collatz(x_1) \rightarrow [C, I, P]$.

```

1 def r_collatz(num):
2     # funcao retorna array [Total de Ciclos ,Impares ,Pares]
3     P = 0
4     I = 0
5     C = 0
6     resp = np.array([C, I, P])
7     # verifica se nBIN eh impar se sim continua, caso par RSH
8     nBIN = converte(num)
9     while nBIN[-1:] == '0': # bit a direita menos sig.
10        nBIN = nBIN[:-1] # elimina bit zero a direita, RSH
11        P += 1
12        C += 1
13    # criamos nBIN_t somamos 1 a nBIN e RSH,
14    # isto enquanto len(nBIN) > 1
15    while len(nBIN) > 1: # existem bits a serem processados
16        if nBIN[-1:] == '1': # eh impar
17            nBIN_t = nBIN
18            nBIN = add_binary_nums(nBIN, '1')
19            nBIN = nBIN[:-1]
20            nBIN = add_binary_nums(nBIN_t, nBIN)
21            I += 1
22            C += 2
23            P += 1 # estou x3 + 1 e dividindo por 2
24        else:
25            nBIN = nBIN[:-1]
26            P += 1
27            C += 1
28    resp = [C, I, P]
29    return resp

```

Fig. 4 – Código: $r_collatz()$

¹⁰ A função $r_collatz(x_1)$ e outras posteriores dependem de diversas outras funções e ajustes no ambiente Python / PyCharm, funções estas que permitem trabalhar com grandes números inteiros na forma binária, tratando-se de um conjunto extra o mesmo será melhor detalhado no apêndice C.

No item (C) da equação (4) considerando-se a sequencia de Collatz relativa ao número 7 ou seja, utilizando os dados de $r_collatz(7) \rightarrow [16, 5, 11]$ ([C,I,P]), onde $I = 5$ obtêm-se:

$$\underbrace{\sum_{j=(I-2)}^1 \left(3^j * \left[\prod_{i=(I-j)}^I (\rho_i) \right] \right)}_{(C)}$$

$$\underbrace{3^3 * \prod_{i=2}^5 (\rho_i)}_{(\alpha)} + \underbrace{3^2 * \prod_{i=3}^5 (\rho_i)}_{(\beta)} + \underbrace{3^1 * \prod_{i=4}^5 (\rho_i)}_{(\delta)}$$

Anteriormente mostrou-se que $\rho_i = [\frac{1}{2^1}, \frac{1}{2^1}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \frac{1}{2^4}]$. Desta forma calcula-se (α) , (β) e (δ) :

$$\underbrace{3^3 * [\frac{1}{2^1} * \frac{1}{2^2} * \frac{1}{2^3} * \frac{1}{2^4}]}_{(\alpha)} + \underbrace{3^2 * [\frac{1}{2^2} * \frac{1}{2^3} * \frac{1}{2^4}]}_{(\beta)} + \underbrace{3^1 * [\frac{1}{2^3} * \frac{1}{2^4}]}_{(\delta)}$$

$$\underbrace{0.0263671875}_{(\alpha)} + \underbrace{0.017578125}_{(\beta)} + \underbrace{0.0234375}_{(\delta)} = \underbrace{0.0673828125}_{(C)}$$

3.5 Conjectura de Collatz completa

Resgatando-se os resultados anteriores teremos:

$$(A) \simeq 0.83056640625, (B) \simeq 0.03955078125, (C) \simeq 0.0673828125, (D) \simeq 0.0625$$

Somando-se os termos da equação (4) finalmente teremos: $(A) + (B) + (C) + (D) = 1$ Conforme pode-se ver a partir da função $abcd('7')$ apresentada no programa da Fig. 5:

$abcd('7') \rightarrow ('7', 0.8305664062499994, 0.039550781249999986, 0.0673828125, 0.0625, 0.9999999999999994)$.

```

1 def abcd(num): #Retorna os valores (A)A,(B)B,(C)C e (D)D
2   [Ci, I, P, gama] = r_collatz1(num)
3   gamas = np.array(gama)
4   B = 2**(((I-1)*math.log2(3))-P)
5   D = 1/(2**gamas[-1])
6   C = 0
7   A = 2** (math.log2(int(num)) + math.log2(3) * I - P)
8   for J in range(I-2,0,-1):
9     sgama = 1
10    for i in range(I-J-1, I):
11      sgama = sgama * (1/(2**gamas[i]))
12    C = C + (3**J)*sgama
13    # qq Xi = ((2**e)-1) divisivel (int) por 3 somente tera um impar,I, o proprio
14    # sendo assim (A) > 0, (B) > 0, (C) = 0 e (D) = 0
15    if I == 1:
16      D = 0
17   return (num, A, B, C, D, A+B+C+D)

```

Fig. 5 – Código: $abcd()$

4 Explorando algumas sequências

Rotineiramente computadores tem testado a Conjectura de Collatz para números cada vez maiores (vide número NN4 nota 8 anterior), valendo-se de máquinas poderosas e algoritmos melhorados que apontam que a Conjectura de Collatz ‘aparentemente’ finaliza em seu ciclo $1 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$. No item anterior mostrou-se que para $\forall x_i = 2^M$, $M \in \mathbb{N}$ o ciclo final será sempre $1 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$.

Neste capítulo explora-se um restrito conjunto de dados que após serem processados permitiram traçar alguns gráficos e realizar algumas considerações sobre os mesmos. Por serem restritos (dados e gráficos) fica evidente que os mesmos podem e devem ser aprimorados com avanço dos testes a serem realizados.

4.1 Ciclo Limite ou Órbita

Anteriormente considerou-se que o ciclo final para Conjectura de Collatz é $1 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$, cabe uma explanação resumida sobre o conceito de ciclo limite[1] ou Órbita. Considere a seguinte transformação:

$$f^n(x_i) = x_{(i+n)} \quad (6)$$

Sendo que $f^n(x_i)$ é o processo de transformação da variável x_i implicando em uma ou mais vezes a aplicação da Conjectura de Collatz inicialmente sobre a variável $x_i \in \mathbb{N}^*$, não trata-se apenas da possibilidade da aplicação de uma função singular pois as etapas podem envolver múltiplos passos onde a variável x_i irá crescer e posteriormente decrescer conforme visto na definição do código da função `collatz_d(x)`, o índice n em $f^n(x_i)$ denota que existem diversas etapas, sendo n os passos que correspondem a aumentos e decréscimos.

Considera-se um ciclo limite ou Órbita⁹ em operações matemáticas sistemas que apresentam a ocorrência do fato de que $f^n(x_i) = x_i$ sendo $x_i \in \mathbb{N}^*$, desta forma constata-se a existência de um ciclo (pode ser repetitivo) ou Órbita (pode ser periódica) dentro da sequência, observa-se que qualquer ciclo limite que porventura exista na Sequência de Collatz onde $x_i \neq 1, x_i \neq 2, x_i \neq 4 \mid x_i \in \mathbb{N}$ conduz ao colapso da Conjectura pois esta fatalmente não chegará à órbita $1 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$, já que foi ‘capturada por outra órbita’.

Em se tratando da Conjectura de Collatz usando a definição encontrada na equação (2) e utilizada na construção da função `collatz_d(x)` pode-se verificar a existência de (*provavelmente apenas*) um ciclo ‘limite’ onde $x_{(i)} = f^n(x_i)$.

A partir da equação (2) podemos agrupar a operação de ‘crescimento’ e ‘decaimento’ do sistema em uma única equação (para a sequência $1 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$), a saber:

$$\frac{3 * x_i + 1}{2^\gamma} = x_{(i+n)} \quad (\text{lembrando-se que } x_i \text{ é ímpar}) \quad (7)$$

⁹ Os termos Ciclo Limite ou Órbita geralmente estão vinculados à sistemas dinâmicos e são sinônimos para atrator[1]. Obtém-se um ‘atrator’ ao aplicar a Conjectura de Collatz ao termo x_i , lembrando que a mesma implica em acréscimos no qual o termo x_i será multiplicado por 3 e acrescido de um, tratando-se de x_i ímpar o resultado de tal acréscimo como já visto resultará em um número par, resultado este que será continuamente dividido por dois até que retorne um número ímpar, sendo novamente submetido a aplicação da Conjectura até que se obtenha um número $x_{(i+n)} = x_i$.

Com os devidos ajustes onde $x_i = x_{(i+n)}$ obtêm-se da equação (7):

$$\frac{1}{(2^\gamma - 3)} = x_i \quad (\text{lembrando-se que } x_i, x_{(i+n)}, \gamma \in \mathbb{N}^*) \quad (8)$$

É fácil constatar que os únicos valores que resolvem a equação (8) são $\gamma = 2$ e $x_i = x_{(i+n)} = 1$, desta forma a expressão $(2^2 - 3) = 1$ evidenciando a existência de um ciclo ‘limite’ na Conjectura de Collatz, que será posteriormente visto ao final da seção 4.1.2.

4.1.1 Órbita periódica

Anteriormente mostrou-se que se existirem outros ciclos limites (órbitas) dentro da Conjectura de Collatz que não o ciclo final $1 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$ a mesma é falsa. A rigor não pode-se tratar o sistema em (2) como uma função de procedimento único (linear) pois existem duas possíveis abordagens (uso da conjectura) uma para números pares e outra para números ímpares, desta forma busca-se uma forma alternativa de considerar as duas operações em apenas uma equação algébrica, a seguir apresenta-se a equação candidata, que certamente irá facilitar o estudo das órbitas:

$$x_{i+1} = [(3 * x_i + 1) * (1 - \cos^2(x_i * \frac{\pi}{2}))] + [\frac{x_i}{2} * \cos^2(x_i * \frac{\pi}{2})] \quad (9)$$

A equação acima codificada¹⁰ em Python conforme Fig. 6 a seguir opera de forma idêntica a função (ou código) `collatz_ang(xi)`.

```

1 # Implementação função Collatz
2 def collatz_ang(x):
3     seq = [x]
4     if x < 1:
5         return []
6     while x > 1:
7         #x = ((3 * x + 1) * (1 - int((np.cos(np.pi/2*x))**2))) + x * ((int((np.cos(np.pi/2*x))
8             **2)) / 2)
9         x = ((3 * x + 1) * (1 - round((np.cos(np.pi / 2 * x)) ** 2))) + x * ((round((
10            np.cos(np.pi / 2 * x)) ** 2)) / 2)
11         seq.append(x)
12     return seq

```

Fig. 6 – Código: `collatz_ang(xi)`

Notar que para os valores de x_i pares o termo $[(3 * x_i + 1) * (1 - \cos^2(x_i * \frac{\pi}{2}))]$ se torna nulo e a operação é apenas de divisão por dois ou seja $x_{i+1} = \frac{x_i}{2}$, porém caso x_i seja ímpar o termo $[\frac{x_i}{2} * \cos^2(x_i * \frac{\pi}{2})]$ é anulado restando apenas o resultado $x_{i+1} = (3 * x_i + 1)$. A partir da equação (9) pode-se realizar o estudo da órbita periódica e os respectivos pontos de equilíbrio, considere a seguinte sucessão:

$$\begin{aligned}
 x_2 &= f(x_1) \\
 x_3 &= f(x_2) = f^2(x_1) \\
 &\dots \\
 x_n &= f(x_{n-1}) \quad \text{ou} \quad x_n = f^{(n-1)}(x_1) \\
 x_{n+1} &= f(x_n) \quad \text{ou} \quad x_{n+1} = f^{(n)}(x_1)
 \end{aligned}$$

¹⁰ No código usou-se a função `round` pois a precisão aritmética utilizada pode gerar valores residuais muito próximos de zero, quando deveriam ser zero, ou caso o valor de x_i seja muito próximo do número UM assume-se o valor UM. Usou-se a função Cosseno para determinar se o valor x_i é par ou ímpar.

Uma órbita periódica se estabelece quando $x_1 = f^{(n)}(x_1)$, ou seja $x_{n+m} = x_n$. Segundo **Monterio**[7] para conhecer as características de uma órbita é necessário conhecer o autovalor λ da mesma, que corresponde ao produto de cada autovalor relativo aos pontos fixos x_i^* na orbita, conforme segue:

$$\lambda^{11} = \frac{df^{(n)}(x_i)}{dx} \Big|_{x_i^*} = \frac{df(x)}{dx} \Big|_{x_1^*} \frac{df(x)}{dx} \Big|_{x_2^*} \cdots \frac{df(x)}{dx} \Big|_{x_i^*}$$

Derivando-se a equação (9) obtêm-se:

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{1}{2} [(-5(\cos^2(x \frac{\pi}{2}))) + (\pi(5x + 2)(\sin(x \frac{\pi}{2}))(\cos(x \frac{\pi}{2}))) + 6] \tag{10}$$

Pode-se verificar que a expressão $(\sin(x \frac{\pi}{2})\cos(x \frac{\pi}{2}))$ será sempre nula para $x_i \in \mathbb{N}^*$ consequentemente anulando o termo que multiplica, desta forma para os fins propostos pode-se calcular λ_j através da seguinte expressão: $\lambda_j = \frac{df(x_i)}{dx} \Big|_{x_i^*}$ ou conforme equação (10) modificada para $x_i \in \mathbb{N}^*$:

$$\lambda_i^{12} = \frac{1}{2} [(-5(\cos^2(x_i^* \frac{\pi}{2}))) + 6] \tag{11}$$

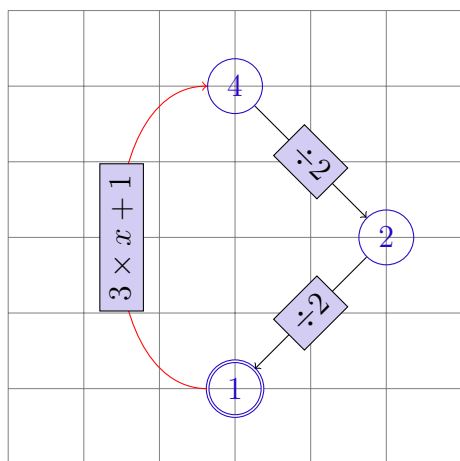
Considerando a órbita periódica conhecida $4 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 4$ procede-se o cálculo do auto-valor λ para esta órbita:

$$\lambda = \lambda_{(x^*=4)} \times \lambda_{(x^*=2)} \times \lambda_{(x^*=1)} \quad \text{ou seja,} \quad \lambda = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times 3 = \frac{3}{4}$$

Ainda de acordo com **Monteiro**[7] como $\lambda < 1$ a órbita de período 3 ($4 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 4$) é estável, o que nos permite afirmar que tal ciclo se repete indefinidamente uma vez alcançado qualquer um dos pontos pertencentes a órbita.

A sequência produzida pela Conjectura de Collatz para $\forall x_i \in \mathbb{N}^*$ sendo $x_i < 2^{68}$ [10] findará ao atingir a órbita fundamental $4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$ já que esta é estável, veremos na próxima subseções se existem outras possíveis orbitas na Conjectura de Collatz.

Cabe aqui algumas observações sobre a órbita $1 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$



grafo 1 - ciclo fundamental

A conjectura de Collatz conforme visto em (1) é formada pelos três primeiros números primos $1, 2, 3 \in \mathbb{N}^*$, sendo o polo principal o número UM, termo este independente que tem a função de tornar par qualquer número impar previamente multiplicado por TRÊS, o resultado par será continuamente dividido por DOIS (enquanto par). Notar que o número UM é o menor que pode ser ‘calculado’ pela conjectura após diversas divisões por DOIS. O número QUATRO ($4 = 3 \times 1 + 1$), constitui o outro polo da órbita que ao ser dividido por DOIS gera o terceiro elemento da mesma órbita, este por sua vez ‘finaliza’ em UM.

¹¹ Esta definição para λ é idêntica a encontrada na página 309 do livro citado em [7]

¹² Notar que as derivadas da Conjectura de Collatz conforme sistema (1) são as mesmas obtidas por esta equação.

4.1.2 Caso Limite $x_i \rightarrow \infty$

Considerando que $x_i \rightarrow \infty$, ou seja é um número muito grande¹³, fazendo $x_1 \simeq 2^{(68)} + 1$ para efeito de análise $x_1 = 295147905179352825857$ o programa $r_collatz(x_1)$ fornece como resposta [562, 191, 371] a saber, Ciclos = 562, Impares (subidas) = 191 e Pares (descidas) = 371. Notar que o ciclo inicial será $3 \times x_1 + 1$, o termo independente UM é muito menor do que o produto $3 \times x_1$, ($1 \lll (3 \times x_1)$), podendo ser desprezado¹⁴ para efeito de estudo, desta forma a conjectura será simplificada conforme sequencia a seguir:

$$x_2 \simeq \frac{3}{2^{71}} \times x_1$$

$$x_3 \simeq \frac{3}{2^{72}} \times x_2 \text{ ou seja } x_3 = \frac{3}{2^{72}} \times \frac{3}{2^{71}} \times x_1 \text{ resumindo: } x_3 = \frac{3^2}{2^{(72+71)}} \times x_1$$

...

$$x_n \simeq \frac{3^{n-1}}{2^{(\sum_{i=1}^{n-1} \gamma_i)}} \times x_1 \text{ como visto anteriormente na equação (5):}$$

$$x_n \simeq x_1 * 3^I * \prod_{i=1}^I (\rho_i) \text{ ou ainda } x_n \simeq \frac{x_1 * 3^I}{2^P}$$

A partir de $x_1 = 295147905179352825857$ obtêm-se: $x_n \simeq \frac{x_1 * 3^{191}}{2^{371}}$

Evoluindo-se a expressão anterior obtêm-se:

$$x_n \simeq x_1 \times 2^{(191 * \log_2(3) - 371)}$$

...

$$x_n \simeq (2^{(68)} + 1) \times 2^{(-68.27216236225917)} \simeq 0.8280774634724271$$

Pode-se verificar o mesmo resultado através da função:

$abcd(2^{68} + 1) = (x_1, A, B, C, A + B + C + D)$ que apresenta a seguinte saída:

(295147905179352825857, **0.8280774634724271**, 9.352118592531982e-22, 0.10942253652757464, 0.0625, 1.0000000000000018)

Como já mencionado anteriormente¹³ números $\leq 2^{68}$ foram experimentalmente testados quanto a Conjectura de Collatz e todos invariavelmente findaram no ciclo $4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$, demonstrando de forma empírica a inexistência de outro ciclo repetitivo que não o trivial, portanto se existir qualquer outro ciclo este deve ter como origem números superiores a 2^{68} além é claro ter seus pontos fixos todos superiores à 2^{68} , ($x_k > 2^{68}, x_k \in \mathbb{N}^*$), porém verificou-se que tal afirmação ($x_k = x_n \simeq 0.8280774634724271$) se mostra em total desacordo com a proposição $x_i \rightarrow \infty$.

Além e com base na equação (4) e sua forma alternativa¹⁵ abaixo, **admitindo-se a existência de X_k um ponto fixo de um ciclo repetitivo** obtêm-se a equação (12) a seguir:

$$\underbrace{x_k * 3^I * \prod_{i=1}^I (\rho_i)}_{(A)} + \underbrace{\sum_{j=(I-1)}^1 \left(3^j * \left[\prod_{i=(I-j)}^I (\rho_i) \right] \right)}_{(B)+(C)+(D)} = x_k$$

$$(A) = \Psi x_k, \quad (B) + (C) + (D) = \Omega$$

¹³ "As of 2020, the conjecture has been checked by computer for all starting values up to $2^{68} \approx 2.95 \times 10^{20}$. All initial values tested so far eventually end in the repeating cycle (4; 2; 1) of period 3.[10]

"As of 2020, the conjecture has been checked by computer for all starting values up to 10^{20} " [2]

¹⁴ No apêndice A apresenta-se uma comparação na qual observa-se a simplificação anterior.

¹⁵ A equação assim modificada é válida para qualquer órbita interna (que porventura possa existir) na conjectura de Collatz sendo x_k um ponto fixo da mesma órbita isto para $\forall x_i > 2^{68} \in \mathbb{N}$.

$$\Psi x_k + \Omega = x_k$$

Multiplicando-se ambos os termos por x_k resulta que:

$$x_k^2(\Psi - 1) + \Omega x_k = 0$$

Logo além da raiz trivial $x_k = 0$ a outra raiz será (esta válida):

$$x_k = \Omega \left(-\frac{1}{\Psi - 1} \right)$$

Lembrando que $-\frac{1}{\Psi - 1} = \frac{1}{1 - \Psi}$ obtêm-se:

$$x_k = \frac{\Omega}{1 - \Psi} \quad (12)$$

A qual também pode-se obter de $\Psi x_k + \Omega = x_k$, observa-se ainda que na mesma equação $\Psi + \frac{\Omega}{x_k} = 1$ em conformidade com o que foi visto anteriormente (final seção 4.1), recorda-se ainda que $0 < \Psi < 1$, $0 \leq \Omega < 1$, e os termos (A), (B), (C) e (D) são todos positivos, portanto:

Suponha que \exists uma órbita na conjectura de Collatz tal que $x_k = x^*$ sendo este um ponto fixo da órbita, tem-se: $x^* = \frac{\Omega}{1 - \Psi}$, admitindo-se $x^* \rightarrow \infty \therefore \Psi^{16} = \frac{3^I}{2^P} \rightarrow 0$, resulta em:

$$\lim_{(x^*, \Psi) \rightarrow (\infty, 0)} \left(\frac{\Omega}{1 - \Psi} \right) = \Omega$$

$$\lim_{x^* \rightarrow \infty} (x^*) = \Omega$$

Porém como visto anteriormente $0 < \Omega < 1$ fica novamente evidente que \nexists qualquer valor de $x^* \neq 1, x^* \neq 2, x^* \neq 4 \mid x^* \in \mathbb{N}$ que satisfaça a equação (12), desta forma conclui-se que:

Na Conjectura de Collatz existe apenas e tão somente um ciclo limite formado pelos pontos estáveis: $1 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$ ¹⁸.

¹⁶ A seguir em 4.2 apresentam-se os argumentos relativos a relação entre I e P (para a base de dados estudada), a saber: $1.658 \times I \lesssim P \lesssim C$

¹⁷ Quando $x^* = 1$ tem-se $\psi = \frac{3^1}{2^2}$, $\Omega = \frac{1}{2^2}$; $x^* = 2$ e $x^* = 4$ são operações apenas de divisão por **dois** que finalizam no número **um**.

¹⁸ A equação [12] tem como solução única os valores: $x^* = x_k = 1, \Omega = 0.25$ e $\Psi = 0.75$, sendo ainda $I = 1$ e $P = 2$ valores relativos ao ciclo repetitivo $1 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$

4.2 Modelos Estocásticos, Processo determinístico!

A sequência de Collatz tem sido descrita em diversos textos através de diversos nomes, sendo um deles: *Hailstone Numbers (Números de Granizo)*[5], assim como o granizo nas nuvens antes de ser precipitado passa por diversas 'subidas' e 'descidas', os números saltam de um lugar ao outro antes de chegar ao ciclo final $4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$ ¹⁹.

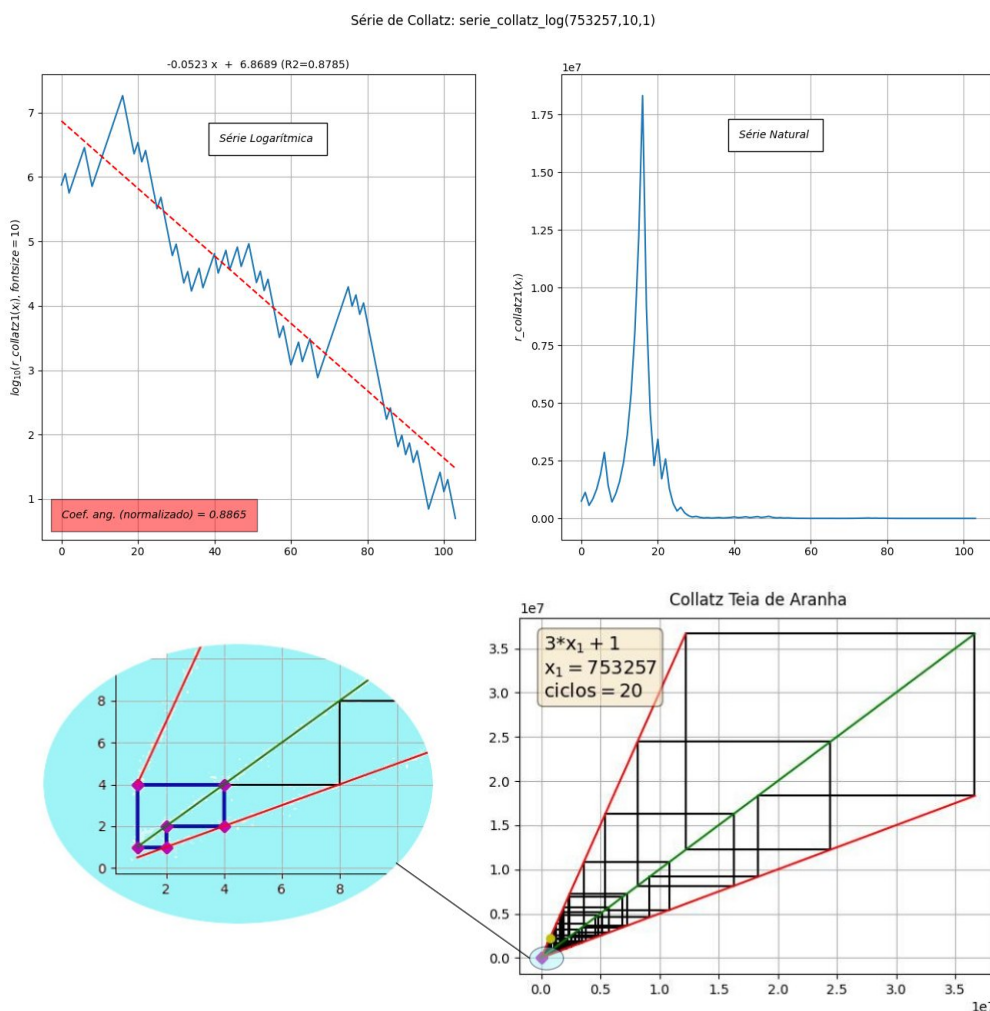


Fig. 7 – Sequencia de Collatz para $x_1 = 753257$

Diversas tentativas em compreender a sequência de Collatz através de simulações em computadores apontam para o ciclo final anteriormente visto $4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$, a Fig. 7²⁰ apresenta um exemplo quando $x_1 = 753257$, pode-se ver a sequencia Natural, gráfico superior direito, e ao lado o \log_{10} da mesma sequência, abaixo vemos a sequência em um gráfico de teia de aranha²¹ e no detalhe o ciclo $4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$.

¹⁹ <https://www.bbc.com/portuguese/geral-36702054>

²⁰ A Fig. 7 foi obtida a partir das funções: $serie_collatz_log(x_1, base \log (=10), termo \text{ independente } (=1))$ a sequência teia de aranha é obtida usando-se a função $cob_web(x_1, termo \text{ independente } (=1), repetir \text{ ciclo final } (=20), limite \text{ ciclos completos } (=10000), fator \text{ multiplicativo } (=3))$

²¹ Monteiro [7] apresenta na página 306, capítulo 9.1.1 da obra citada como construir um diagrama teia de aranha, aqui diferentemente do exposto usamos duas retas limites (em vermelho) sendo a superior a função $3 \times x_i + 1$ e a inferior $\frac{x_i}{2}$, ao centro encontramos a reta identidade onde $x = y$, o procedimento para criação do gráfico é idêntico.

Observa-se que quando os ciclos aproximam-se do final (neste caso 110 iterações) a resposta tende ao ciclo final $4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$, destaca-se no gráfico logarítmico o coeficiente negativo (-0.0523) da reta aproximada que faz com que os sucessivos valores de x_i diminuam, o mesmo coeficiente normalizado $10^{-0.0523} = 0.8865\dots$ demonstra que sendo menor que UM nas sucessivas iteradas o valor de x_i deve diminuir. De fato o fator de ‘progressão’ desta ‘aparente’ série é na média menor do que a unidade, segundo **Lagarias** [6] previsões heurísticas feitas usando-se modelos probabilísticos testados apontam que tal fator é em média menor que **UM**, convergindo assim nas sucessivas iteradas para o ciclo final $1 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$.

No item 4.1 tem-se demonstrando que a sequência comporta apenas e tão somente um ciclo $4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$, sendo prova suficiente como tal para todos os números; porém números $x_i \in \mathbb{N} \mid x_i \rightarrow \infty$ permitem que se faça uma abordagem complementar recorrendo a modelos probabilísticos, apresentando resultados significativos que apontam para tal conclusão:

“.. um modelo probabilístico básico de iterações da função $3x + 1$ propõe que a maioria das trajetórias para iterações $3x + 1$ tem números iguais de iterações pares e ímpares”[6](traduzido pelo autor).

Nos itens 2 e 3.1 viu-se que o número de subidas é idêntico ao de descidas, ou seja a quantidade de números ímpares é a mesma de números pares (equações (2) e (5)), **Lagarias** também apresenta tal fato.²²

Nos itens subsequentes apresenta-se de forma simplificada alguns subsídios ligados aos processos estatísticos que inferem semelhante conclusão.

²² 'A basic probabilistic model of iterates of the $3x + 1$ function $T(x)$ proposes that most trajectories for $3x + 1$ iterates have equal numbers of even and odd iterates' - Jeffrey C Lagarias. *The $3x + 1$ problem and its generalizations* - pg. 8

4.2.1 Relação entre ciclos Pares e Impares.

A imagem a seguir contém quatro gráficos gerados a partir da função *nucleo1()* e *nucleo2()* presente no código principal (*main.py*) detalhado no anexo A.

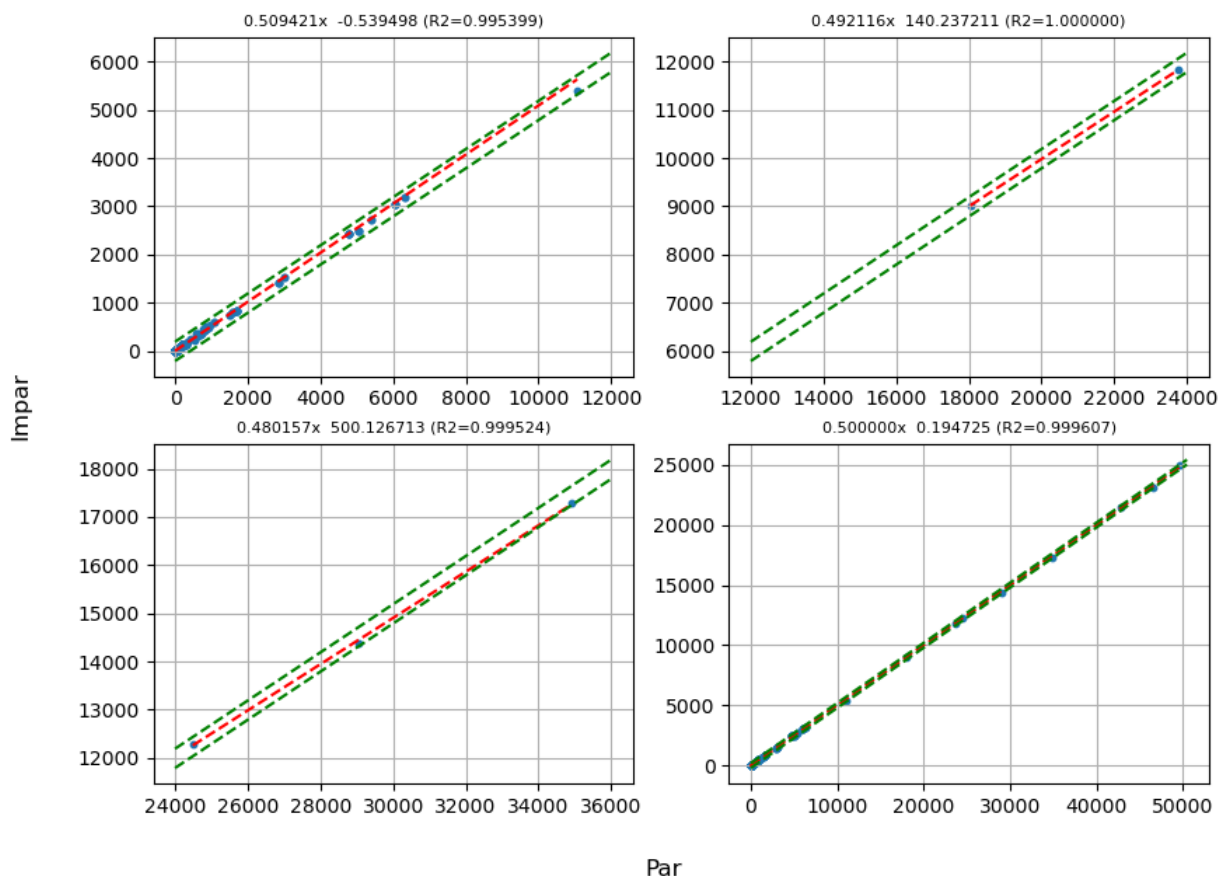


Fig. 8 – Gráficos $P \times I$

O quarto gráfico apresenta todos os pontos ($P \times I$) que fazem parte da base de dados estudada²³, os três primeiros detalham trechos do quarto gráfico. Pode-se observar que os pontos (em azul) representam o número total de ciclos Pares e respectivo número de ciclos Impares para que determinado x_1 chegue a UM , já as linhas internas (em vermelho) são obtidas como a melhor aproximação (linear) aos pontos citados; as duas linhas externas (em verde) limitam os valores dentro de uma região específica que incluem todos os pontos em azul da base estudada, ou seja o índice de confiança nesta região é de 100%. As linhas de aproximação (em vermelho) tem seus componentes apresentados no topo de cada gráfico, no último gráfico podemos ver uma forte convergência entre os valores $P \times I$ mostrando uma relação entre os mesmos.

²³ arquivo: *main.py* (linhas 32 a 62) que contém 50094 valores para x_1 .

4.2.1.1 Região limite

Os dois segmentos de retas na cor verde representam a região limite onde todos os pontos (azul) pares $P \times I$ se encontram (referente a base de estudo).

As retas tem como componentes:

$$R_s(\text{reta superior}) \quad \longrightarrow \quad 0.500000 * P + 189.304 \quad (13)$$

$$R_i(\text{reta inferior}) \quad \longrightarrow \quad 0.500000 * P - 210.500 \quad (14)$$

Verifica-se que de fato são paralelas (mesmo coeficientes angulares) e a largura (espaçamento) entre ambas é de $\simeq 400$ pontos, o que corresponde a dizer que para um determinado números de ciclos Pares obteremos dentro da faixa apresentada o valor de $\sim I \pm 200$ pontos.

Pela equação de ajuste apresentada (último dos quatro gráficos) temos um coeficiente de correlação $R^2 = 0.999607$, muito próximo de UM indicando adesão do modelo Linear à distribuição apresentada:

$$Ciclos_{\text{Impares}} = 0.500000 \cdot Ciclos_{\text{Pares}} + 0.194725 \quad (15)$$

Observa-se que a correlação entre o numero de ciclos Pares e ciclos Impares ($I \simeq 0.5 \times P$) está de acordo com a distribuição Normal dos números $\in \mathbb{N}^*$ conforme será visto posteriormente. Salienta-se que apesar da precisão não ser absoluta, pois as equações trabalham com números Reais sujeitos à arredondamentos, sendo ainda os ciclos P, I números naturais positivos, e a sequencia de Collatz determinística, não obstante o desconhecimento sobre a evolução da mesma sequência em relação a todos os números $\in \mathbb{N}^*$ possíveis recorre-se à estas aproximações e ao uso de métodos estatísticos. A equação (9) não indica de forma assertiva que \forall numero x_i terminara em *um* após os Ciclos Totais ($=P+I$) porem os termos A,B,C e D mostrados no código da Fig. 5 ou os equivalentes termos (A), (B), (C) e (D) presentes na equação (4) fornecem recursos para uma aproximação com base no número inicial x_i e possíveis pontos $I \times P$, ($C = I + P$). Nota-se ainda que as retas limite podem ser melhor definidas ao se adotador segmentos menores para os valores x_i .

Nos gráficos a seguir (Fig. 9) pode-se contemplar para a base de dados estudada os Histogramas[8] relativos ao termo A da equação (4), a relação entre ciclos impares e pares (pares compreende todos os ciclos em que há divisão simples por dois) observa-se ainda que o numero de ciclos Impares é menor que o de ciclos (totais) pares, e no último gráfico que qualquer ciclo (na base estudada) tem mais de 60% de ciclos pares.

Importa ressaltar que o valor A_{max} é obtido para $x_i = 87381, I = 1, P = 18$, esta combinação gera também a menor relação $\frac{I}{P}$ presente na base estudada, por outro lado representa a maior relação $\frac{P}{C}$ conforme pode-se ver no último gráfico da Fig. 9. Observa-se ainda que o valor de \mathbf{A} que depende de x_1 responde por mais de 79% do valor de x_n .

Série de Collatz: A, ciclos I/P, e ciclos P/C

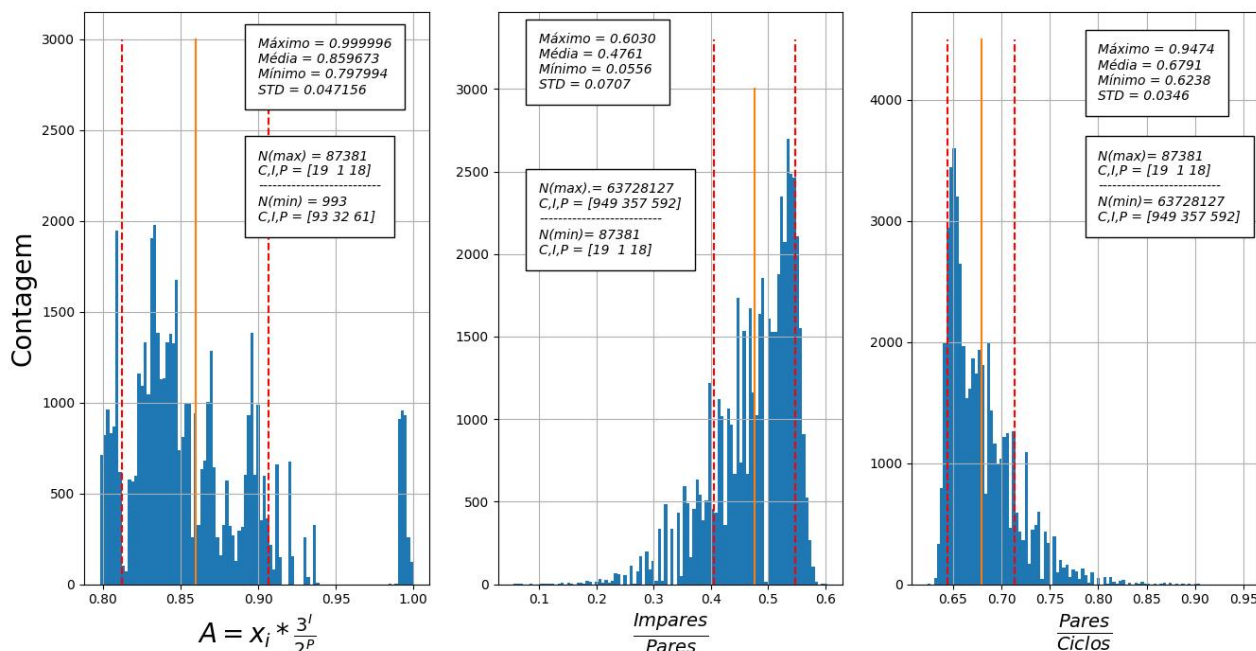


Fig. 9 – Gráficos distribuições de $A, \frac{I}{P}, \frac{P}{C}$

4.2.2 Máximo valor para x_i

Admite-se que na Sequência de Collatz exista um valor máximo onde $x_i = x_m$ a partir do qual qualquer valor posterior (ou anterior) será inferior à este máximo x_m , pode-se concluir que o valor máximo é par, e o mesmo será dividido por um número 2^γ . Anteriormente viu-se que *collatz_d(7)* produz a seguinte saída:

$$collatz_d(7) = [7, 22, 11, 34, 17, \mathbf{52}, 13, 40, 5, 16, 1]$$

O número **52** corresponde ao máximo (nesta sequência), que posteriormente será dividido por $2^\gamma = 2^2 = 4$ tornando-se o número ímpar **13**, uma vez atingido um máximo necessariamente os números subsequentes serão menores, evidenciando-se um decréscimo na série, se a mesma série fosse apenas de aumentos não seria limitada em um ciclo final, ou seja tenderia ao infinito[6].

Observa-se que o fator de ‘progressão’ desta ‘aparente’ série é na média menor do que a unidade, segundo **Lagarias** [6] previsões heurísticas feitas usando-se modelos probabilísticos testados apontam que tal fator é em média menor que **UM**, convergindo assim nas sucessivas iteradas para o ciclo final $1 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$.

Considerando-se o conjunto dos números naturais $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ e o conjunto dos números pares não negativos $\mathbb{P} = \{0, 2, 4, 6, \dots\}$ verifica-se que ambos tem a mesma Cardinalidade²⁴ $|\mathbb{N}| = |\mathbb{P}| = \aleph_0$ [9], o mesmo ocorre com o conjunto dos números potência

²⁴ Existe $f(x_i) = 2 \times x_i$ uma bijeção de $x_i \in \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{P}$

de $2 \mathbb{E}_2 = \{0, 2, 4, 8, 16, \dots\}$, o conjunto dos números ímpares \mathbb{I} também possui a mesma cardinalidade de \mathbb{N} . Em suma ao se lidar com conjuntos infinitos (enumeráveis) que tem a mesma cardinalidade ($|\mathbb{N}| = |\mathbb{P}| = |\mathbb{E}_2| = |\mathbb{I}| = \aleph_0$) induz-se que a distribuição de probabilidade para \forall numero x_i presente nestes conjuntos são equivalentes, já que os mesmos conjuntos são equipotentes, tornando qualquer previsão difícil de ser realizada ou que a mesma apresente tendências objetivas (tendo em conta conjuntos enumeráveis infinitos). No item anterior viu-se que toda série de Collatz tem um ciclo final $1 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$ e conseqüentemente um máximo estabelecendo para cada serie um conjunto particular de números finitos, tendo igual quantidade de números ímpares e pares[6] (antes de chegar ao número 1).

Considere ainda o conjunto $\mathbb{D}_7 = [7, 22, 11, 34, 17, 52, 13, 40, 5, 16]$ ²⁵ cuja cardinalidade é: $|\mathbb{D}_7| = 10$, fica evidente que a quantidade de números pares é idêntica a de números ímpares presentes em \mathbb{D}_7 , ambos subconjuntos (pares \mathbb{D}_{7P} e ímpares \mathbb{D}_{7I}) possuem a mesma cardinalidade finita, no item 2 anteriormente visto e aqui adaptado tem-se:

$$x_i \in \mathbb{D}_{7I} = [7, 11, 17, 13, 5] = [x_1, x_3, x_5, x_7, x_9] \quad | \quad i = \{1, 3, 5, 7, 9\}$$

$$x_i \in \mathbb{D}_{7P} = [22, 34, 52, 40, 16] = [x_2, x_4, x_6, x_8, x_{10}] \quad | \quad i = \{2, 4, 6, 8, 10\}$$

Fato que permite assumir que qualquer $x_i \in \mathbb{D}_7$ possui idêntica probabilidade de ocorrência, ou seja existe um mesmo numero de aumentos e decréscimos na série, porém observa-se que nas descidas ou decréscimos feitos pelas divisões por números pares existem divisões compostas, divide-se mais de uma vez por dois, o que está em conformidade com as observações vistas no mesmo item 2, ou seja:

$$\rho_i = \frac{x_{(2i+1)}}{x_{(2i)}}, \text{ sendo: } \rho_i = \left[\frac{1}{2^1}, \frac{1}{2^1}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \frac{1}{2^4}\right] = \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}\right].$$

Assim sendo devido as várias divisões cumulativas um número par presente na sequência de Collatz será dividido mais de uma vez pelo número dois, a função $r_collatz(x)$ (Fig. 4) já apresentava a composição da sequencia em termos $[C, I, P]$ ²⁶, ou seja C_{iclos}, I_{mpares} e P_{ares} , onde verifica-se que: $C = I + P$, e $P > I$.

Na tabela 2, mostra-se a distribuição dos números potências de 2 (menores que 5000) em função do expoente γ , lembrando que qualquer número par interno a série (resultado de $3 \times x_i + 1$) será necessariamente dividido por um numero par do tipo 2^γ , evidenciando-se a probabilidade não nula de que o mesmo (resultado de $3 \times x_i + 1$) seja dividido mais de uma vez por 2.

A função $nPares(x)$ (Fig.10) fornece os valores da tabela 2 para $x = 5000$, no console do Python: `divisores = np.array(nPares(5000)): 2` que fornecerá a seguinte resposta:

$$divisores[0] = array([2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, 2048, 4096])$$

e

$$divisores[1] = array([1250, 625, 313, 156, 78, 39, 20, 10, 5, 2, 1, 1])$$

²⁵ O conjunto \mathbb{D}_7 é obtido como resposta da função `collatz_d(7)` antes do número 1.

²⁶ Em algumas citações o total de Ciclos é conhecido como tempo de paradas.

γ	divisor	ocorrência	ocorrência (%)
1	2	1250	50
2	4	625	25
3	8	313	12.52
4	16	156	6.24
5	32	78	3.12
6	64	39	1.56
7	128	20	0.80
8	256	10	0.40
9	512	5	0.20
10	1024	2	0.08
11	2048	1	0.04
12	4096	1	0.04

Tabela 2 – Divisores pares onde: $2^\gamma \leq 5000$

Cuja soma ($\text{sum}(\text{divisores}[1])$) é 2500, ou seja existem 2500 divisores disponíveis sendo estes potência de 2, a função $\text{nPares}(\text{numero})[2:]$ indica o número original e se necessário o par imediatamente superior (a ser usado caso o número informado seja ímpar).

```

1 def nPares(num):
2     import numpy as np
3     conta = int(num)
4     #valores=[["n","C","I","P","nucleo"]]
5     valores=[]
6     while (conta > 1):
7         c_num = str(conta)
8         resp = divByPot2(c_num)
9         valores.append(resp[1])
10        conta -= 2
11        if conta <= 1:
12            break
13    matrizV = np.array(valores)
14    expoente, ocorrencia = np.unique(matrizV, return_counts=True)
15    return expoente, ocorrencia

```

Fig. 10 – Código: $nPares()$

Anteriormente na tabela 1 apresentou-se alguns resultados da relação entre I e P, ou seja: entre o número de ciclos Impares em relação ao número de ciclos Pares ²⁷ onde 'aparentemente' temos:

$$\lim_{x_1 \rightarrow \infty} r_collatz(x_1) \rightarrow \frac{I}{P} \approx 0.50$$

A tabela 3 apresenta a distribuição para o número NN8, onde:

$$[C, I, P], E\gamma = r_collatz1(NN8) \rightarrow [74671, 25016, 49655], E\gamma.$$

A matriz $E\gamma$ (para o número NN8²⁸) é composta por 25016²⁹ elementos, que correspondem a 2^γ , γ na primeira coluna da tabela 3.

²⁷ Os ciclos Pares correspondem a divisões simples por dois em cada ciclo, de forma que $\prod_{i=1}^I (\rho_i) = 2^{-P}$.

²⁸ O número NN8 tem sua representação na forma de *String*, visando preservar todos os dígitos sem arredondamentos. O número NN8 é a concatenação do número NN4 + NN4, tendo 3012 dígitos significativos

²⁹ Ocorrência corresponde ao número de vezes em que há divisão, são operações de divisão simples (por 2) e compostas (por 2^γ), resultando em mesma quantidade das operações $3 * x + 1$ (subidas, ciclos I).

γ	divisor	ocorrência	$\sim \div 2$	ocorrência (%)	Heurística[6]
1	2	12536	12536	50.11	1.2253
2	4	6350	12700	25.38	1.1390
3	8	3137	9411	12.54	1.0072
4	16	1485	5940	5.94	0.9119
5	32	754	3770	3.01	0.8491
6	64	379	2274	1.52	0.8107
7	128	185	1295	0.74	0.7885
8	256	80	640	0.32	0.7773
9	512	62	558	0.25	0.7675
10	1024	20	200	0.08	0.7639
11	2048	15	165	0.06	0.7609
12	4096	6	72	0.02	0.7596
13	8192	4	52	0.02	0.7587
14	16384	3	42	0.01	0.7579
	totais	25016	49655	100	—

Tabela 3 – Divisores pares: r_collatz(NN8)

Um número x_i (par) será dividido por 2^γ , pode-se verificar que o numero de divisões por 2^γ é exatamente igual ao número de operações ímpares, o que está em acordo com a função $collatz_d(x_1)$, ou seja 50% das operações ocorrem sobre números ímpares e 50% das operações ocorrem sobre números pares, porém a distribuição das operações de divisão seguem uma distribuição exponencial, coluna ocorrência (%) e Fig. 11. A última coluna da tabela 3 refere-se o argumento heurístico apresentado por Lagarias[6], no qual o fator multiplicativo (MF) entre dois números consecutivos inteiros ímpares deve ser $\sim \frac{3}{4} < 1$, observa-se na Tabela 3 que $MF \cong 0.7579$: “este argumento heurístico sugere que, em média, as iterações numa trajetória tendem a diminuir de tamanho, de modo que não deveriam existir trajetórias divergentes” (traduzido pelo autor)..

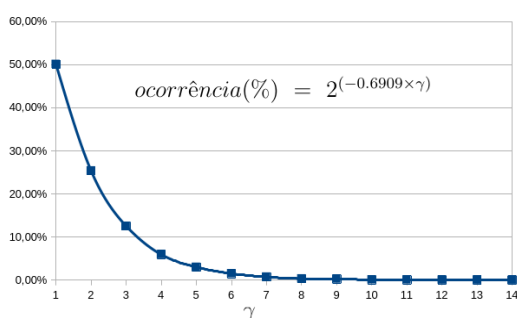


Fig. 11 - Ocorrência de Pares

O gráfico da (Fig. 11) ilustra a distribuição exponencial dos números pares conforme ocorrência (%) na Tabela 3 (NN8) e equação aproximada. Verifica-se a partir da equação (Fig. 11) ao lado que a probabilidade de um número par subsequente à operação $3 \times x_i + 1$ ser dividido por 2^γ ou seja estar entre 2^1 e 2^{14} é dada por:

$$\mathbb{P}(1 \leq \gamma \leq 14) = \int_1^{14} e^{(-0.6909 \times \gamma)} \simeq 72.5\%$$

Chama a atenção também o fato que a incidência dos ciclos ímpares (25016) em relação às divisões por 2 (49655 na tabela 3) quando ponderados ser:

$$\frac{25016}{49655} \times \frac{3}{2} \cong 0.7557$$

Número muito próximo ao argumento heurístico apresentado por Lagarias ($MF \cong 0.75$).

5 Conclusão

A grande questão:

Todos os números naturais quando submetidos a sequência de Collatz sempre finalizam no ciclo $4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$?

As evidências estatísticas e alguns programas auxiliares apontam nesta direção, porém não são enfáticos em admitir tal conclusão, isto é o esperado já que opera-se sobre um conjunto com infinitos números $\in \mathbb{N}^*$, e as ferramentas utilizadas são limitadas face a representação interna referente aos números suportados pelas máquinas utilizadas, porém com o auxílio de operações binárias sobre números expressos na forma de texto (string), trabalhou-se com números imensos tais como NN8, a operação $3 \times x_i + 1$ e mesmo a divisão por DOIS são relativamente simples de serem realizadas com operações binárias e apresentam uma grande ajuda ao superar a barreira da representação numérica intrínseca aos computadores atuais. Tais resultados operando sobre 'grandes' números da ordem de 10^{3000} mostrou-se em conformidade com os resultados esperados e proclamados.

Cabe destacar com base no que foi previamente apresentado no item 4.1.2 e apêndice A:

Na Conjectura de Collatz existe apenas e tão somente um ciclo limite formado pelos pontos estáveis: $1 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$.

A inexistência de outros ciclos limites internos à Conjectura de Collatz, e ainda de acordo com a equação (12) aqui transcrita: $\Psi + \frac{\Omega}{x_1} = 1$, recordando-se ainda que $0 < \Psi < 1$ e $0 < \Omega < 1$ resulta que:

Todo e qualquer número $x_i \in \mathbb{N}^*$ (mesmo que $x_i \rightarrow \infty$) ao ser submetido à Conjectura de Collatz invariavelmente irá finalizar no ciclo limite formado pelos pontos estáveis: $1 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$.

A Conjectura de Collatz é definitivamente além de um desafio, um campo fértil para utilização de ferramentas disponíveis na matemática, em cada etapa novas ferramentas e/ou observações (as vezes outrora negligenciadas) se fazem presentes, em uma destas surpresas pode-se afirmar:

Qualquer número $x_i = 2^\sigma - 1, | \sigma \in \{0, 2, 4, 6, 8, \dots\}$ será sempre divisível por três.

A função $divide_3(expI, expF)$ auxilia na verificação, porém foge ao escopo deste a demonstração de tal afirmação, ficando para um possível próximo trabalho!

“To myself I am only a child playing on the beach, while vast oceans of truth lie undiscovered before me.” – Isaac Newton

Bibliography

- [1] Gregory L. Baker and Jerry P. Gollub. *Chaotic Dynamics: An Introduction*. Cambridge University Press, 1996. Citado na página 11.
- [2] Barina D. Convergence verification of the collatz problem. *j supercomput* 77, 2681–2688 (2021). <https://doi.org/10.1007/s11227-020-03368-x>. Accessed: 2023-09-30. Citado na página 14.
- [3] J.A. Grauer. *Analogy Between the Collatz Conjecture and Sliding Mode Control*. NASA technical memorandum. National Aeronautics and Space Administration, Langley Research Center, 2021. Citado na página 4.
- [4] K. Hartnett. Mathematician proves huge result on ‘dangerous’ problem. *Quanta Magazine*. Dec,2019. Citado na página 2.
- [5] B. Hayes. *Computer recreations: The ups and downs of hailstone numbers*. *Scientific American* 250 , No. 1, (1984), 10–16., 1984. Citado na página 16.
- [6] Jeffrey C Lagarias. The $3x + 1$ problem and its generalizations - a heuristic argument. <https://www.cecm.sfu.ca/organics/papers/lagarias/paper/html/node3.html>. Accessed: 2023-07-10. Citado 7 vezes nas páginas 2, 17, 20, 21, 23, 28, and 29.
- [7] Luiz Henrique Alves Monteiro. *Sistemas dinâmicos*. Editora Livraria da Física, 2002. Citado 3 vezes nas páginas 13, 16, and 29.
- [8] Vito R. Vanin Otaviano A. M. Helene. *Tratamento Estatístico de Dados em Física Experimental*. Editora Edgard Blücher, 1981. Citado na página 19.
- [9] Wikipedia. Cardinality — Wikipedia, the free encyclopedia. <https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Cardinality&oldid=1185197728>. [Online; accessed 3-November-2023]. Citado na página 20.
- [10] Wikipedia. Collatz conjecture — Wikipedia, the free encyclopedia. https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Collatz_conjecture&oldid=1178942543. [Online; accessed 3-November-2023]. Citado 3 vezes nas páginas 2, 13, and 14.

APÊNDICE A – Comparação entre Ω calculado e aproximado.

O texto presente neste apêndice foi destacado e tratado como complementar servindo para embasar as observações vistas no item 4.1.2, nas quais quando $x_k \rightarrow \infty$ observa-se que $\Psi = \frac{3^I}{2^P} \rightarrow 0$ e devido a este fato foi desprezado o valor $\mathbf{1}$ presente na fórmula $3 \times x_i + \mathbf{1}$, já que este é muito menor do que o produto $3 \times x_1, (1 \lll (3 \times x_1))$. Sendo assim calculou-se o valor de Ω pelos dois métodos (I) e (II) a saber:

$$\underbrace{\sum_{j=(I-1)}^0 \left(3^j * \left[\prod_{i=(I-j)}^I (\rho_i) \right] \right)}_{(B)+(C)+(D)=\Omega} = \Omega \quad (I)$$

$$\lim_{(x^*, \Psi) \rightarrow (\infty, 0)} \left(\frac{\Omega}{1 - \Psi} \right) = \Omega \quad \therefore \quad \left(\frac{\Omega}{1 - \Psi} \right) = \Omega \quad (II)$$

Os gráficos a seguir usando-se a função $\text{omega_1e2}(x_i, x_n, \text{salto})$ apresentam o módulo da diferença entre os valores obtidos em (I) e (II) ou seja $|\Omega(I) - \Omega(II)|$:

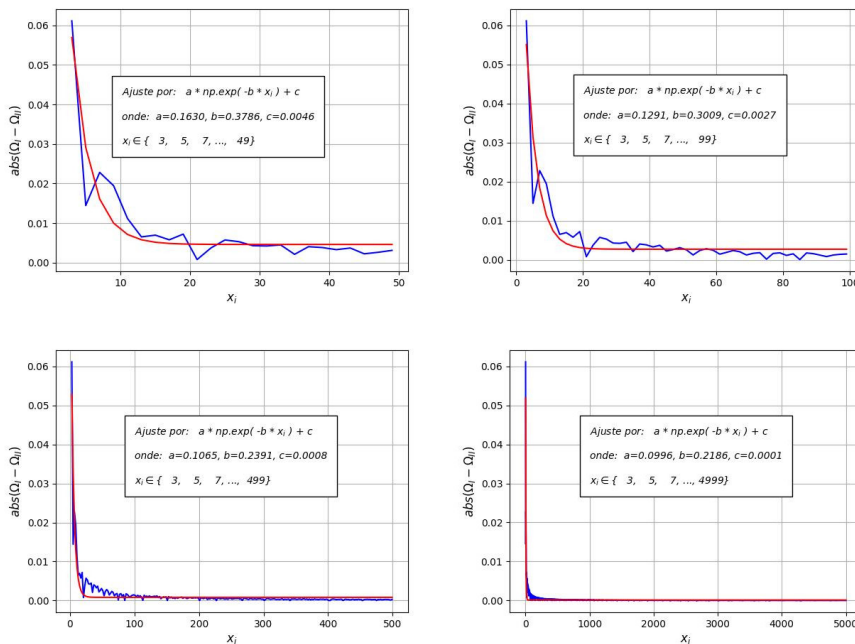


Fig. 12 – Gráficos: $\text{abs}(\Omega(I) - \Omega(II)) \times x_i$

Na Fig. 12 as sequencias em azul são os valores calculados do módulo das diferenças, já em vermelho a linha de tendencia exponencial aproximada conforme valores de \mathbf{a} , \mathbf{b} e \mathbf{c} em cada gráfico, notar que o valor residual \mathbf{c} quando $x_i \rightarrow \text{inf}$, temos que $\lim_{x_i \rightarrow \infty} \mathbf{c} \rightarrow 0$, demonstrando que as equações (I) e (II) conduzem à resultados semelhantes, e que tal aproximação (quando $x_i \rightarrow \text{inf}$) é aceitável assim como os limites:

$$\lim_{(x^*, \Psi) \rightarrow (\infty, 0)} \left(\frac{\Omega}{1 - \Psi} \right) = \Omega, \quad \lim_{x^* \rightarrow \infty} (x^*) \longrightarrow \Omega$$

Os gráficos a seguir (Fig. 13) apresentam ambos os métodos para o cálculo de Ψ , (I) e (II), notar que quando $x_i \rightarrow \inf$ o valor de Ψ também tende a zero ($\Psi \rightarrow 0$).

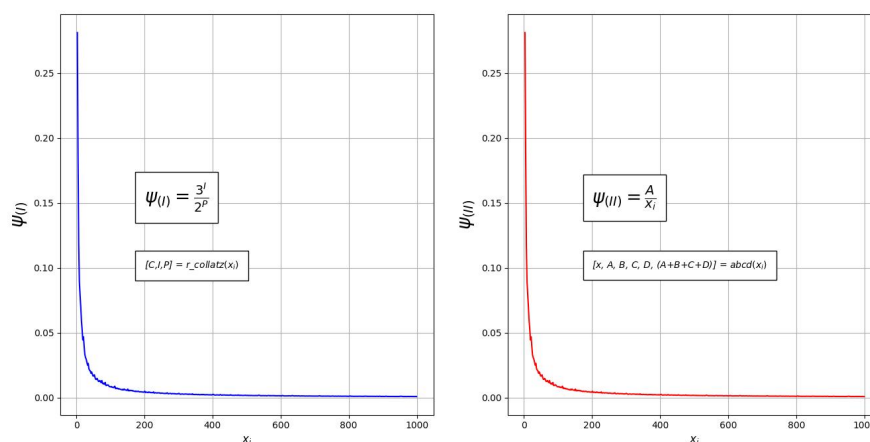


Fig. 13 – Gráficos: $\Psi \times x_i$

Desta forma com o exposto neste apêndice e visto anteriormente fica evidente que \nexists qualquer valor de $x^* \neq 1, x^* \neq 2, x^* \neq 4 \mid x^* \in \mathbb{N}$ que satisfaça a equação (12), o que leva a concluir que \exists apenas e tão somente um ciclo limite na Conjectura de Collatz.

De forma complementar considere hipoteticamente a equação (12) supondo que $\Psi \rightarrow 1$ (o que está em desacordo com os gráficos da Fig. 13), como visto anteriormente $\Psi x_k + \Omega = x_k$ teremos necessariamente que $\Omega \rightarrow 0$, obtêm-se que: $\Psi x_k + 0 = x_k$ ou $\Psi x_k = x_k$

Dado que $\Psi = \frac{3^I}{2^P}$, resulta que $x_k \simeq x_k \times 2^{(I * \log_2(3) - P)}$, para que a expressão $2^{(I * \log_2(3) - P)} = 1$, seja verdadeira tem-se: $I * \log_2(3) = P$, relembrando $\Omega = B + C + D$ onde $B = \frac{\Psi}{3}$, resulta que (quando $\Psi \rightarrow 1, \Omega \rightarrow 0$) $\Omega = \frac{\Psi}{3} + C + D \therefore$ tem-se que $\Omega > \frac{1}{3}$ o que contradiz a hipótese anteriormente formulada. Os Gráficos a seguir (Fig. 14) ilustram que: $\Omega > 0$ e $\Psi \neq 1$, reforçando que a hipótese $\Psi \rightarrow 1, \Omega \rightarrow 0$ ³⁰ não é válida.

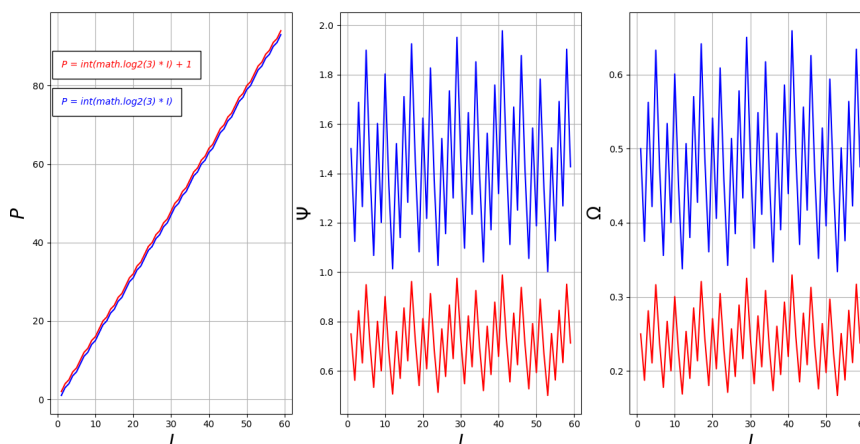


Fig. 14 – Gráficos: $P \times I, \Psi \times I, \Omega \times I$

³⁰ No gráfico da Fig. 14 o ponto mais próximo de 1 para Ψ , corresponde a $I = 53$ e $P = 84$ quando obtêm-se $\Psi \simeq 1.00209031... > 1$.

APÊNDICE B – Relação entre I e P.

1 Equação (4) possibilidades em função de I, P.

O termo (C) da equação (4) apresenta uma certa complexidade na formação dos conjuntos que contém os valores de γ_i , tendo uma distribuição dos elementos γ_i em arranjos ($AR(\gamma_i) = (I - 1)!$) diferentes³¹, a função $r_collatz1('7')$ exibe como resposta:

$$[C, I, P, E\gamma] = r_collatz1('7') \longrightarrow ([16, 5, 11], \underbrace{[1, 1, 2, 3, 4]}_{(E\gamma)})$$

O conjunto $E\gamma = [1, 1, 2, 3, 4]$ original, que são os expoentes a serem aplicados a $2^{-E\gamma}$, resultando no conjunto $\rho_i = [\frac{1}{2^1}, \frac{1}{2^1}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \frac{1}{2^4}] = [\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}]$. Pode-se reescrever o conjunto $E\gamma$ de diversas formas ou seja em $(I - 1)!$ arranjos, sem que o resultado de $\prod_{i=1}^n(\rho_i)$ fosse alterado.

Porém tais arranjos irão impactar o termo (C) da equação (4) conforme pode-se ver a seguir para dois conjuntos específicos³²:

$$\rho_i^E = [\frac{1}{2^1}, \frac{1}{2^1}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \frac{1}{2^4}], \quad \rho_i^M = [\frac{1}{2^3}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^1}, \frac{1}{2^1}, \frac{1}{2^4}]$$

Relembrando-se o item (C) da equação (4), onde $I = n = 5$:

$$\underbrace{\sum_{j=(n-2)}^1 \left(3^j * \left[\prod_{i=(n-j)}^n (\rho_i) \right] \right)}_{(C)}$$

Adotando-se ρ_i^E, ρ_i^M vistos anteriormente pode-se calcular as frações diádicas $(\alpha), (\beta)$ e (δ) para as duas séries de ρ :

$$\begin{aligned} & \underbrace{3^3 * [\frac{1}{2^1} * \frac{1}{2^2} * \frac{1}{2^3} * \frac{1}{2^4}]}_{(\alpha^E)} + \underbrace{3^2 * [\frac{1}{2^2} * \frac{1}{2^3} * \frac{1}{2^4}]}_{(\beta^E)} + \underbrace{3^1 * [\frac{1}{2^3} * \frac{1}{2^4}]}_{(\delta^E)} \\ & \underbrace{0.0263671875}_{(\alpha^E)} + \underbrace{0.017578125}_{(\beta^E)} + \underbrace{0.0234375}_{(\delta^E)} = \underbrace{0.0673828125}_{(C^E)} \\ & \underbrace{3^3 * [\frac{1}{2^2} * \frac{1}{2^1} * \frac{1}{2^1} * \frac{1}{2^4}]}_{(\alpha^M)} + \underbrace{3^2 * [\frac{1}{2^1} * \frac{1}{2^1} * \frac{1}{2^4}]}_{(\beta^M)} + \underbrace{3^1 * [\frac{1}{2^1} * \frac{1}{2^4}]}_{(\delta^M)} \\ & \underbrace{0.10546875}_{(\alpha^M)} + \underbrace{0.140625}_{(\beta^M)} + \underbrace{0.09375}_{(\delta^M)} = \underbrace{0.33984375}_{(C^M)} \end{aligned}$$

³¹ "From the viewpoint of this heuristic argument, the central difficulty of the problem lies in understanding in detail the "mixing" properties of iterates of the function for all powers of 2"^[6]

³² Neste exemplo usaremos ρ_i^E para destacar valores normais, e ρ_i^M que maximiza o item (C) da equação (4) desde que seja menor que 1.

Torna-se evidente conforme considerações anteriores que grande parte da complexidade na solução da equação (4) consiste em resolver o termo (C) da mesma, já que os arranjos possíveis com os coeficientes γ_i são da ordem de $(I - 1)!$.

2 A conjectura considerando números Reais.

Certamente considerar números pares e ímpares no caso de $x_i \geq 0 | x_i \in \mathbb{R}^*$ faz pouco sentido já que estes números por poderem ser fracionários ou irracionais não apresentam paridade. A conjectura deve ser adaptada, e neste caso usa-se apenas:

$$collatz_reais(x_i)^{33} \implies x_n = \frac{3 \times x_i + 1}{4}$$

O fator $\frac{3}{4}$ está de acordo com o argumento heurístico de Lagarias[6], no qual o fator multiplicativo (MF) entre dois números subsequentes deve ser $\sim \frac{3}{4} < 1$, no gráfico da Fig. 14 observa-se o ciclo limite definido pela circunferência de raio **UM** para a qual todas as sequências convergem³⁴. Relembrando que de acordo com **Monterio**[7] "para conhecer as características de uma órbita é necessário conhecer o autovalor λ da mesma, que corresponde ao produto de cada autovalor relativo aos pontos fixos x_i^* na orbita", conforme segue:

$$\lambda = \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x_i^*} = \frac{3}{4}$$

Como $\lambda < 1$ a órbita é estável, o que nos permite afirmar que tal ciclo se repete indefinidamente uma vez alcançado o valor **UM**.

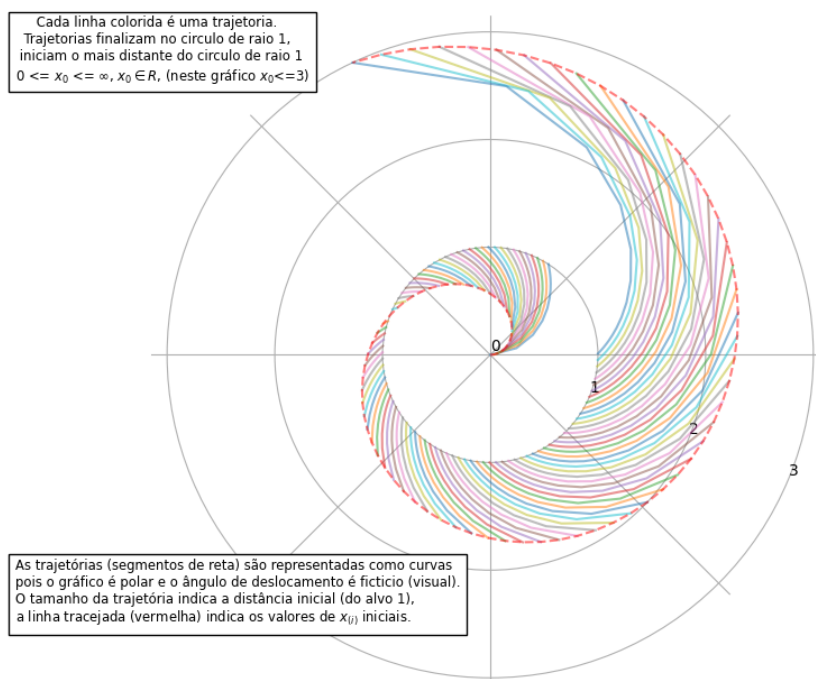


Fig. 15 – Gráfico Polar: $\frac{(3 \times x_i + 1)}{4}$

³³ A função *collatz_reais()* sem qualquer parâmetro gera o gráfico da Fig. 14, os parâmetros são opcionais, num= x_i (ou nenhum para $0 \leq x_i \leq 3$), steps= 50 (ciclos na trajetória), jLIM= 90 (numero de trajetórias)

³⁴ O gráfico para efeito de visualização de várias trajetórias foi plotado de forma polar, onde o o início de cada trajetória (sequencial) é deslocado por um ângulo progressivo e situa-se sobre a linha tracejada em vermelha, o final de cada trajetória ocorre na circunferência de raio UM

3 Um exemplo prático (de força bruta)

Considere o número 753257 cujo gráficos foram vistos na Fig. 7 item 4.2, partir da equação (5) fazendo: $\prod_{i=1}^n(\rho_i) = \prod_{i=1}^P(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2^P}$

teremos:

$$(A) \implies h(753257) = 753257 * \frac{3^I}{2^P} \quad (= 0.8098463884774229)$$

Lembrando que este valor "geralmente" é ≥ 0.78 (dados em tabela 1), deve-se buscar os valores de I e P que atendam o exposto observando-se ainda a equação (11), a função $acha_ABD(n,m,c)$ disponível no arquivo Collatz_Files construída em conformidade com a faixa limite (duas retas em verde) busca encontrar os valores que satisfaçam a condição acima, é importante notar que podem ser apresentadas até 400 respostas possíveis de $I \times P$, já que delimitou-se uma região onde o índice de confiança para a base de estudos é de 100%.³⁵

Executando-se a função $acha_ABD(n,m,c)$ ($n=753257$, $m=0.5$, $c=0.194725$, \mathbf{m} e \mathbf{c} conforme equação 15) obtém-se as (são apresentadas apenas 14) respostas³⁶, na lista a seguir destaca-se a correta:

Item	A	Pares	Impares	A+B+D	I/P(%)
1	0.886717	72	33	0.949217	0.458333
2	0.841688	80	38	0.904189	0.475000
3	0.798946	88	43	0.861447	0.488636
4	0.898814	91	45	0.961315	0.494505
5	0.853172	99	50	0.915672	0.505051
6	0.809846	107	55	0.872347	0.514019
7	0.911077	110	57	0.973578	0.518182
8	0.864812	118	62	0.927312	0.525424
9	0.820895	126	67	0.883396	0.531746
10	0.923507	129	69	0.986008	0.534884
11	0.876610	137	74	0.939111	0.540146
12	0.832095	145	79	0.894595	0.544828
13	0.936107	148	81	0.998607	0.547297
14	0.789840	153	84	0.852341	0.549020
...

Tabela 4 – $acha_ABD(753257, 0.5, 0.194725)$

Entre as possibilidades que a função $acha_ABD(n,m,c)$ apresentou a correta corresponde ao item 6, ou seja $P = 107, I = 55$ ($r_collatz(str(753257)) \implies [162, 55, 107]$). Este método (via força bruta) apresenta muitos valores candidatos, e apenas serve para entre estes resultados mostrar o mais adequado sem que seja necessário calcular a Conjectura de Collatz completa como apresentado na equação (2).

³⁵ Notar que o índice de confiança neste caso de estudo é de 100% pois incluí-se todos os pontos da Base de estudo dentro das retas limite.

³⁶ Levou-se em conta os seguintes critérios para aceite das respostas: $A \geq 0.78$ and $A \leq (1 - B - D)$ and $I > 0$ and $(I/P) \geq (m*0.9)$ and $(I/P) \leq (m*1.1)$, aceita-se uma variação de $\pm 10\%$ no coeficiente angular da reta modelada.

APÊNDICE C – Configuração do ambiente Python / PyCharm

1 Criando o projeto

Uma vez configurado o ambiente Python a versão atualmente usada é : Python 3.11.6 em ambiente Linux 6.5.12-200.fc38.x86_64 e a interface IDE PyCharm 2022.1.3 (Community Edition), vamos criar o projeto inicial (aqueles que já o fizeram podem pular esta etapa). Inicie o programa PyCharm e crie um novo projeto chamado Python_Collatz conforme figura a seguir:

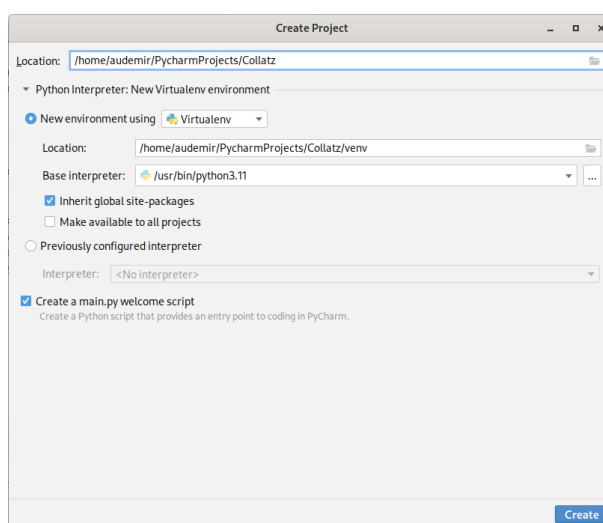


Fig. 16 – Criando o Projeto

Ao criar o projeto a tela inicial com o arquivo main.py (inicial) é apresentada (Fig.16), note que automaticamente é criada a função `print_hi(name)`, e a mesma é acionada internamente ao código main.

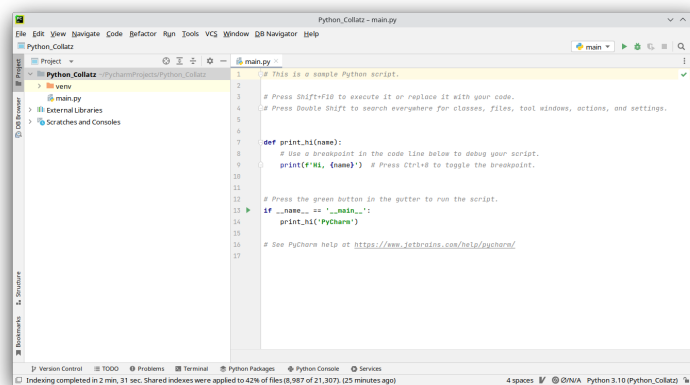


Fig. 17 – Arquivo main.py (inicial)

Fazendo as alterações no código (exemplo) nosso arquivo main.py (inicial) ficará assim:

```

1 import matplotlib.pyplot as plt
2 import pandas as pd
3 import numpy as np
4 import math
5 import sys
6 import os
7 import csv
8
9 from Collatz_Files import *
10
11 # Press the green button in the gutter to run the script.
12 if __name__ == '__main__':
13     n = math.log(int(f'{0b101010000011001:#0}'))
14     print(n)

```

Fig. 18 – Código: *main.py*

As linhas 13 e 14 apresentadas no código da Fig. 17, foram incluídas apenas para que seja possível testar previamente o ambiente.

1.1 Incluindo arquivos

Antes de rodar o programa main.py que devemos incluir outros arquivos:

```

__init__.py37,
BaseDados.py,
funcoes.py,
Collatz_Files.py

```

A listagem a seguir é referente ao arquivo `__init__.py` e ajusta o ambiente para importar funções locais desenvolvidas em arquivos separados do main.py dentro do diretório de trabalho.

```

1 # todo comentário em Python inicia com o caracter #
2 # este arquivo tem o objetivo de indicar para o programa
3 # main.py a localização
4 # das funções auxiliares
5
6 from BaseDados import *
7 from funcoes import funcoes
8 from Collatz_Files import Collatz_Files

```

Fig. 19 – Código: `__init__.py`

Os arquivos citados: main.py, funcoes.py, Collatz_Files.py, BaseDados.py e conjeturas.py apresentam quase duas mil linhas de código, a probabilidade de digitação indevida é muito grande, devido a isto os arquivos serão disponibilizados em forma eletrônica quando solicitados no e-mail do autor, após publicação estarão disponíveis em diretório aqui indicado.

³⁷ Note que antes e depois da palavra `init` existem dois caracteres `_` de sublinhar

APÊNDICE D – Conflito de Interesses

O presente artigo é fundamentado sobre pesquisas e artigos diversos de caráter público, reconhece-se no presente artigo os desenvolvimentos e informações tornados públicas, aplicando-se a devida referência aos mesmos autores citados. Trata-se de análise sobre tema de domínio público, o que não gera conflitos quanto aos interesses em geral!

Agradecimentos

Antecipadamente agradeço pelo apoio e divulgação por parte de:

Scientific Electronic Library Online

E-mail: scielo@scielo.org

Permitindo a postagem deste artigo em forma de preprint.

Dezembro de 2023, São José dos Campos / SP

Este preprint foi submetido sob as seguintes condições:

- Os autores declaram que estão cientes que são os únicos responsáveis pelo conteúdo do preprint e que o depósito no SciELO Preprints não significa nenhum compromisso de parte do SciELO, exceto sua preservação e disseminação.
- Os autores declaram que os necessários Termos de Consentimento Livre e Esclarecido de participantes ou pacientes na pesquisa foram obtidos e estão descritos no manuscrito, quando aplicável.
- Os autores declaram que a elaboração do manuscrito seguiu as normas éticas de comunicação científica.
- Os autores declaram que os dados, aplicativos e outros conteúdos subjacentes ao manuscrito estão referenciados.
- O manuscrito depositado está no formato PDF.
- Os autores declaram que a pesquisa que deu origem ao manuscrito seguiu as boas práticas éticas e que as necessárias aprovações de comitês de ética de pesquisa, quando aplicável, estão descritas no manuscrito.
- Os autores declaram que uma vez que um manuscrito é postado no servidor SciELO Preprints, o mesmo só poderá ser retirado mediante pedido à Secretaria Editorial do SciELO Preprints, que afixará um aviso de retratação no seu lugar.
- Os autores concordam que o manuscrito aprovado será disponibilizado sob licença [Creative Commons CC-BY](#).
- O autor submissor declara que as contribuições de todos os autores e declaração de conflito de interesses estão incluídas de maneira explícita e em seções específicas do manuscrito.
- Os autores declaram que o manuscrito não foi depositado e/ou disponibilizado previamente em outro servidor de preprints ou publicado em um periódico.
- Caso o manuscrito esteja em processo de avaliação ou sendo preparado para publicação mas ainda não publicado por um periódico, os autores declaram que receberam autorização do periódico para realizar este depósito.
- O autor submissor declara que todos os autores do manuscrito concordam com a submissão ao SciELO Preprints.