Proceso de instrucción de la derivada aplicado a estudiantes de Ingeniería Comercial en Chile

Maritza Katherine Galindo Illanes, Adriana Breda

https://doi.org/10.1590/SciELOPreprints.6650

Envíado en: 2023-08-21
Postado en: 2023-08-29 (versión 1)
(AAAA-MM-DD)

Proceso de instrucción de la derivada aplicado a estudiantes de Ingeniería Comercial en Chile

Instruction process of the derivative applied in Commercial Engineering students in Chile

Maritza Katherine Galindo Illanes[1], maritza.galindo@uss.cl, Orcid ID: https://orcid.org/0000-0003-1394-2075

Adriana Breda[2, *], adriana.breda@ub.edu, Orcid ID: https://orcid.org/0000-0002-7764-0511

Resumen

[Objetivo] El objetivo de este artículo es presentar los resultados de la implementación de un diseño instruccional de enseñanza de la derivada para estudiantes universitarios de la carrera de Ingeniería Comercial en Chile. **[Metodología]** Los participantes del estudio son noventa estudiantes de la asignatura de Cálculo Aplicado a los Negocios de una universidad chilena. El diseño metodológico, basado en las herramientas del Enfoque Ontosemiotico de la Cognición e instrucción Matemáticos, considera diversas configuraciones ontosemióticas en las situaciones-problemas sobre tangentes, el cálculo de derivadas a partir de reglas y teoremas de derivación, aplicaciones de la derivada para el cálculo de máximos y mínimos y análisis de gráficas de funciones. Además, integra las TIC en las diversas actividades. **[Resultados]** Los resultados indican que la propuesta instruccional de enseñanza de la derivada supera algunas de las dificultades de aprendizaje de los estudiantes, evidenciadas en diversas investigaciones. En particular, las dificultades de los estudiantes de Ingeniería Comercial en torno a la concepción euclidiana de la recta tangente; la interpretación de la función derivada y su representación geométrica, la optimización de funciones económicas y la aplicación de la derivada a funciones marginales. **[Conclusiones]** Se considera que para que ocurra la efectividad de un proceso de enseñanza y aprendizaje de la derivada en una carrera específica, es fundamental que los programas de asignatura y los formadores de los futuros profesionales incorporen, en la instrucción, las configuraciones ontosemioticas de la derivada, sus diferentes campos de problemas y las aplicaciones contextuales junto a los recursos TIC.

Palabras clave: enseñanza de las matemáticas; derivada; proceso de instrucción; TIC; Enfoque Ontosemiotico; formación de ingenieros; Ingeniería Comercial.

Abstract

[Objective] The objective of this article is to present the results of the implementation of an instructional design for the teaching of the derivative for undergraduate students of Business Engineering in Chile. **[Methodology]** The participants of the study are ninety students of Applied Business Calculus at a Chilean university. The methodological design, based on the tools of the Ontosemiotic Approach to Mathematical Cognition and Instruction, consider diverse ontosemiotic configurations in the situations-problems on tangents, the calculation of derivatives from rules and theorems of derivation, applications of the derivative for the calculation of maxima and minima and analysis of function graphs. In addition, it integrates ICT into various activities. **[Results]** The results indicate that the instructional proposal for teaching the derivative overcomes some of the student's learning difficulties, as evidenced in various research studies. In particular, the difficulties of Business

* Use este símbolo para: Autor para correspondencia
1 Facultad de Economía y Gobierno, Universidad San Sebastián, Concepción, Chile.
2 Departament d'Educació Lingüística, Científica i Matemàtica, Universitat de Barcelona, Barcelona, España.

Engineering students regarding the Euclidean conception of the tangent line; the interpretation of the derivative function and its geometric representation, the optimization of economic functions and the application of the derivative to marginal functions. **[Conclusions]** It is considered that for the effectiveness of a teaching and learning process of the derivative to occur in a specific career, it is essential that the subject programs and the trainers of future professionals incorporate the ontosemiotic configurations of the derivative, its different problem fields and contextual applications together with ICT resources in the instruction.
Keywords: mathematics education; derivative; instructional process; ontosemiotic approach; engineering education; commercial engineering.

Introducción

La derivada es uno de los objetos matemáticos fundamentales presente en la formación de los ingenieros, lo que ha generado diversos estudios con relación a la complejidad de sus significados, sus múltiples representaciones, los procesos de enseñanza y aprendizaje, la idoneidad del significado de la derivada en los distintos currículos y los significados parciales en los textos universitarios de enseñanza para las ingenierías (Galindo Illanes & Breda, 2023b; Larios et al., 2021; Larios & Jiménez, 2022; Pino-Fan et al., 2016; Rodríguez-Nieto et al., 2022).Trabajar los distintos significados de un objeto matemático es un aspecto propuesto por el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento e Instrucción Matemáticos (EOS, a partir de ahora) (Godino et al., 2007, 2019) lo cual se plantea analizar la complejidad de los objetos matemáticos por medio de sus pluri significaciones (significados parciales).

Algunos estudios de la derivada en carreras de Ingeniería Comercial destacan tener presente la relación entre los conceptos económicos y matemáticos, siendo los modos de representación los más utilizados en microeconomía (Ballard & Johnson, 2004; Butler et al., 1994; García et al., 2006; Hey, 2005). También, por las dificultades en la interpretación de situaciones económicas debido a la débil comprensión de los significados matemáticos que las organizan (Ariza Cobos & Linares Ciscar, 2009).

En esta línea, este trabajo hace parte de una investigación más amplia que pretende profundizar la comprensión de los futuros ingenieros comerciales acerca al objeto matemático derivada en el contexto chileno. Para atender dicho objetivo, se ha realizado un estudio en diferentes etapas.

La primera etapa fue un estudio diagnóstico, lo cual reveló que los futuros ingenieros comerciales presentan dificultades en: a) el concepto de función y la concepción euclidiana de la recta tangente; b) la construcción del significado de recta tangente como límite de rectas secantes; c) la interpretación de la función derivada y su representación geométrica; realizar operaciones para calcular la pendiente de una recta y; d) operar con funciones (Galindo Illanes et al., 2022; Galindo Illanes & Breda, 2022b).

La segunda etapa fue el estudio del tratamiento de la derivada en los programas de las asignaturas de las carreras de Ingeniería Comercial en Chile, lo cual mostró que, si bien la mayor parte de las propuestas curriculares presentan similitudes en la organización de contenidos y en los elementos lingüísticos utilizados para la construcción del objeto derivada, se observan diferencias importantes en la preponderancia de la derivada interpretada como una razón de cambio y en los campos de problemas abordados (Galindo Illanes & Breda, 2022a, 2023a).

La tercera etapa fue el estudio de los significados pretendidos de la derivada en libros de texto para las carreas de Ingeniería Comercial en Chile, que registró: a) un énfasis en el significado parcial de la derivada como el límite del cociente de incrementos y un predominante lenguaje simbólico en los argumentos; b) poca presencia de algunos teoremas importantes relacionados a la derivada y; c) falta de una representatividad de las definiciones de la derivada (Galindo Illanes & Breda, 2023b).

La cuarta etapa fue el diseño instruccional de un proceso de enseñanza y aprendizaje de la derivada para futuros ingenieros comerciales, estudiantes de la carrera de Ingeniería Comercial de una universidad chilena (Galindo Illanes et al., 2023). Para la construcción del diseño instruccional, se tuvo en cuenta, además de las herramientas teóricas del Enfoque Ontosemiótico (explicadas en la secuencia del texto), los resultados de las etapas del estudio previamente mencionado.

Con base en lo anterior, este trabajo tiene como objetivo dar a conocer algunos resultados obtenidos como producto de la implementación del diseño de un proceso de enseñanza y aprendizaje de la derivada para futuros ingenieros comerciales, estudiantes de la carrera de Ingeniería Comercial de una universidad chilena.

Marco teórico

Los desarrollos teóricos propuestos por el EOS, explicados recientemente por Godino et al. (2019), tienen como objetivo dar respuesta a algunos problemas generados en el campo de la Educación Matemática. En el EOS, se asume que la actividad matemática es una actividad humana centrada en la resolución de problemas, que acontece en un tiempo-espacio determinado, a través de una secuencia de prácticas que, a menudo, se consideran procesos (de significación, conjeturar, argumentar etc.). Para ello, el EOS propone las nociones de situación-problema de práctica matemática (secuencia de prácticas) que ocurren durante la resolución de estas situaciones-problema. Tales secuencias tienen lugar en el tiempo y se suelen considerar, en muchos casos, como procesos. En particular, el uso y/o la emergencia de los objetos primarios (problemas, definiciones, proposiciones, procedimientos y argumentos), se producen a través de los respectivos procesos matemáticos de comunicación, problematización, definición, enunciación, elaboración de procedimientos (creación de algoritmos y rutinas) y argumentación.

En el EOS, la noción de juego de lenguaje ocupa un lugar importante, al considerarla, junto con la noción de institución, como los elementos contextuales que relativizan las maneras de estar y de existir de los objetos matemáticos. Los objetos matemáticos intervienen en las prácticas matemáticas y emergen de las mismas, según el juego de lenguaje en que participan y se agrupan en las distintas dualidades (Font et al., 2013).

✓Extensivo-intensivo: los objetos matemáticos pueden estar participando como particulares, o bien, como generales y, según el juego de lenguaje, pueden pasar de ser particulares a generales o viceversa.

✓Expresión-contenido: los objetos matemáticos pueden estar participando como representaciones, o bien, como objetos representados y, según el juego de lenguaje, pueden pasar de ser representaciones a ser objetos representados o viceversa.

✓Personal-institucional: los objetos matemáticos pueden estar participando como objetos personales, o bien, como objetos institucionales y, según el juego de lenguaje, pueden pasar de ser personales a ser institucionales. La dialéctica personal-institucional es esencial en los procesos de instrucción, ya que en ellos se pretende que los alumnos se apropien de los objetos institucionales (aprendan).

✓Ostensivo-no ostensivo: estos dos modos de estar de los objetos matemáticos en la práctica matemática se han de tomar como algo que se puede mostrar a otro directamente versus algo que no se puede mostrar directamente, solamente por medio de otro algo, que sí, se puede mostrar directamente. Los ostensivos matemáticos presentan una característica que es propia de las cosas del mundo real, que es la existencia real en el tiempo y en el espacio, mientras que, a los objetos no ostensivos, no se les atribuye este tipo de existencia, pues usualmente se considera que tienen una existencia ideal.

✓Unitario-sistémico: cuando una entidad matemática es considerada como un objeto, se está adoptando una perspectiva unitaria sobre el mismo. Ahora bien, hay momentos en que interesa adoptar una perspectiva sistémica sobre dicho objeto, por ejemplo, considerando las partes que lo componen. En esta dualidad, los objetos matemáticos pueden estar participando como objetos unitarios, o bien, como un sistema.

Por otra parte, las dualidades, antes descritas, dan lugar a los siguientes procesos: institucionalización – personalización, generalización – particularización, análisis/descomposición – síntesis/reificación, materialización/concreción – idealización/abstracción, expresión/representación – significación.

El EOS también asume el principio de que el conocimiento de un objeto, por parte de un sujeto (ya sea individuo o institución), es el conjunto de funciones semióticas que este sujeto puede establecer en las que el objeto interviene como expresión o contenido. Además, la correspondencia entre un objeto y el sistema de prácticas donde tal objeto interviene se interpreta como el significado de ese objeto (institucional o personal). Por ejemplo, cuando un sujeto realiza y evalúa una secuencia de prácticas matemáticas, activa un conglomerado formado por situaciones-problemas, lenguajes, definiciones, proposiciones, procedimientos y argumentos, articulados en lo que, en términos del EOS, se llama una configuración de objetos primarios (Font et al., 2013). Para delimitar los significados de un objeto matemático, el EOS propone la herramienta denominada análisis de sistemas de prácticas (personales e institucionales) y las configuraciones ontosemióticas involucradas en ellas (Godino, 2014; Godino & Batanero, 1994).

En Font et al. (2013) se explica que la noción de complejidad del objeto matemático y la de articulación de los componentes de dicha complejidad juegan un papel esencial. Entender la complejidad, en términos de una pluralidad de significados, es resultado de la visión pragmatista sobre el significado que se asume en el EOS. Desde un punto de vista pragmatista, el significado de un objeto matemático se entiende como el conjunto de prácticas en la que dicho objeto interviene de una manera determinante (o no). Un objeto matemático, que se ha originado como un emergente del sistema de prácticas que permite resolver un determinado campo de problemas, con el paso del tiempo queda enmarcado en diferentes programas de investigación. Cada nuevo programa de investigación permite resolver nuevos tipos de problemas, aplicar nuevos procedimientos, relacionar el objeto (y, por tanto, definir) de manera diferente, utilizar nuevas representaciones etc. De esta manera, con el paso del tiempo, aparecen nuevos subconjuntos de prácticas (sentidos) que amplían el significado del objeto.

Para el objeto matemático derivada, Pino-Fan et al. (2011) caracterizan su complejidad mediante nueve configuraciones de objetos primarios: 1) tangente en la matemática griega; 2) variación en la edad media; 3) métodos algebraicos para hallar tangentes; 4) concepciones cinemáticas para el trazado de tangentes; 5) ideas intuitivas de límite para el cálculo de máximos y mínimos; 6) métodos infinitesimales en el cálculo de tangentes; 7) cálculo de fluxiones; 8) cálculo de diferencias; y 9) derivada como límite.

En Pino-Fan et al. (2013) se utilizan estas nueve configuraciones para la reconstrucción del significado global de la derivada, el cual es utilizado para valorar la representatividad del significado pretendido en el currículo de Bachillerato de México. La caracterización de la complejidad de la derivada realizada en Pino-Fan et al. (2011) facilita tener elementos para diseñar cuestionarios que permiten caracterizar la comprensión de los estudiantes, futuros profesores o profesores en servicio sobre la derivada (Pino-Fan et al., 2015). Galindo Illanes y Breda (2023b), profundizan el estudio de los significados de la derivada en el caso de que este objeto sea enseñado a estudiantes de ingeniería comercial. En este estudio, teniendo en cuenta las herramientas del EOS que se acaban de presentar y los estudios previos realizados (pre requisitos para este) en Galindo Illanes et al. (2022, 2023) y Galindo Illanes y Breda (2022b, 2022a, 2023a, 2023b) se busca presentar los resultados de un proceso de instrucción de la derivada aplicado a futuros ingenieros comerciales en Chile.

Metodología

En este apartado se explica el contexto del estudio, los instrumentos de colecta de datos y el análisis de estos.

Contexto del estudio y participantes

Participaron en la investigación 90 estudiantes de la carrera de Ingeniería Comercial de la Facultad de Economía y Negocio de una universidad chilena, con edades entre 19 y 20 años. El plan de estudios de Ingeniería Comercial considera la asignatura de cálculo aplicado a los negocios en el tercer semestre académico, y tiene como prerrequisito el curso de Álgebra o Métodos Cuantitativos.

Bases para una propuesta didáctica implementada

El plan de intervención implementado consideró, para el desarrollo de la enseñanza de la derivada, los siguientes elementos:

a) Campos de problema. A partir del significado institucional pretendido y el análisis de referencia de Galindo Illanes y Breda (2023b), la propuesta considera los campos de problemas sobre: tangentes (CP1), el cálculo de derivadas a partir de reglas y teoremas de derivación (CP2), y aplicaciones de la derivada para el cálculo de máximos y mínimos, y análisis de gráficas de funciones (CP3).
b) Configuraciones epistémicas. La propuesta considera las configuraciones epistémicas caracterizadas y utilizadas por Galindo, Breda y Alvarado (2023), estas son:
   (i) Configuración Manipulativa, el estudiante trabaja con papel, regla y lápiz. El lenguaje utilizado en esta configuración es el característico de los procedimientos descriptivos y de la geometría analítica.
   (ii) Configuración Computacional, el estudiante dispone de notebook o celulares o Tablet, internet, *GeoGebra* (versión gratuita) y código QR. El lenguaje y los procedimientos son de tipo gráfico, geométrico y descriptivo.
   (iii) Configuración Algebraica, el estudiante dispone de notebook o celulares o Tablet, internet, Software educativos como *Symbolab* (versión gratuita). El lenguaje y procedimientos son de tipo simbólico y tabular.

c) Trabajo presencial de aula y trabajo autónomo fuera de aula. La trayectoria didáctica considera sesiones en aula y sesiones fuera del aula, todas dirigidas por el docente de la asignatura. Las sesiones de aula se desarrollan en formato presencial y en los horarios establecidos de clases. Sin embargo, las sesiones fuera de aula no tienen horario establecido y considera el trabajo autónomo del estudiante.

Desarrollo de la enseñanza

El programa de actividad curricular de Cálculo Aplicado a los Negocios se desarrolla en 15 semanas, cada semana dispone de 4 sesiones presenciales en aula, cada sesión tiene una duración de 80 minutos. Además, cada semana dispone de 2 horas cronológicas de trabajo autónomo, declaradas en el programa curricular de la asignatura.

Las sesiones presenciales de aula se realizaron en los horarios establecidos para las clases teóricas y prácticas, las actividades consideradas fueron individuales y grupales colaborativas favoreciendo el dialogo, la retroalimentación y la consolidación de los conocimientos adquiridos por el estudiante durante su trabajo autónomo. Las sesiones fuera de aula son parte del trabajo autónomo del estudiante e incluyen actividades como visualizar videos educativos, leer apuntes teórico-práctico y realizar las tareas, disponibles en la plataforma virtual Moodle.

La unidad 1 de aprendizaje corresponde al estudio de la derivada de funciones reales, a través de los campos de problemas CP1, CP2 y CP3, para el desarrollo de la enseñanza se contemplan 5 semanas de clases, la temporalización y planificación es una adaptación de Galindo Illanes et al. (2023), descritas en la tabla 1:

Tabla 1

Temporalización y Planificación de los Campos de Problemas.

Semana	**CP**	**Sesiones Presenciales (SP)**	**Tiempo SP**	**Sesiones Trabajo Autónomo (TA)**	**Tiempo TA**
1	1	1 – 4	320 minutos	1	120 minutos
2	1	5 – 8	320 minutos	2	120 minutos
3	2	9 – 12	320 minutos	3	120 minutos
4	3	13 - 16	320 minutos	4	120 minutos
5	3	17 - 20	320 minutos	4	120 minutos

Nota: Adaptación de Galindo Illanes et al. (2023).

La planificación del estudio de los campos de problemas de la derivada, contemplados en el programa de la asignatura, contemplan veinte sesiones presenciales de aula y 8 sesiones de trabajo autónomo fuera de aula, en un tiempo de cinco semanas. En la tabla 2 se presenta una adaptación de las actividades descritas en Galindo Illanes et al. (2023).

Tabla 2

Temporalización y Planificación de CP1, CP2 y CP3.

Sesión Presencial (SP)	Campo de problemas (CP)	Acción didáctica	Objetivo de la acción didáctica	Lenguajes	Configuraciones
1-2	CP1	Tarea SP1	Obtención de la pendiente de la recta tangente mediante aproximaciones por la pendiente de rectas secantes.	Tabular Geométrico Gráfico Descriptivo	Manipulativas Computacional
3-4	CP1	Tarea SP2	Identificación de la recta tangente a una curva.	Geométrico Gráfico Descriptivo	Manipulativas Computacional
5-6	CP1	Tarea SP3	Interpretación geométrica de la derivada en un punto particular. (Consolidar utilizando teoría de límite intuitivamente)	Simbólico Gráfica	Computacional Algebraica
7	CP1	Tarea SP4	Articulación de la derivada de una función en un punto y su función derivada. (Consolidar utilizando teoría de límite)	Tabular Gráfica Simbólico Descriptivo	Computacionales Algebraica
8	CP1	Tarea SP5	Aplicación de la función derivada (Utilizando definición de límite)	Simbólico	Computacionales
9	CP2	Tarea SP6	Definición del álgebra de las derivadas	Simbólico	Algebraica
10	CP2	Tarea SP7	Definición de las reglas de derivadas para las funciones: • $f(x) = x^n, \forall n \in \mathbb{R}$, x^n y x^{-n} bien defini • $f(x) = e^x, \forall x \in \mathbb{R}$	Simbólico Gráfico	Computacional Algebraica

			• $f(x) = \ln(x), \forall x > 0$ Aplicación del álgebra de las derivadas y de las reglas de derivación.		
11	CP2	Tarea SP8	Definición de las derivadas de las funciones exponencial y logaritmo, y de la regla de la cadena, aplicada a funciones polinómicas, exponenciales y logarítmicas.	Simbólico Gráfico	Computacional Algebraica
12	CP2	Tarea SP9	Aplicación de las reglas de derivadas para el cálculo de marginales.	Simbólico	Algebraica
13	CP3	Tarea SP10	Articulación de la interpretación geométrica de la derivada y el criterio de la primera derivada para extremos relativos.	Gráfico Simbólico	Computacional
14	CP3	Tarea SP11	Aplicación del criterio de la primera derivada a problemas clásicos de optimización de funciones reales y económicas.	Gráfico Simbólico	Algebraica
15	CP3	Tarea SP12	Aplicación de la primera derivada al análisis de la monotonía de funciones reales y económicas, orientada al trazado de curvas.	Simbólico Gráfico	Computacional Algebraica
16	CP3	Tarea SP13	Aplicación del criterio de la segunda derivada a problemas	Gráfico Simbólico	Algebraica

			clásicos de optimización de funciones reales y funciones económicas.		
17	CP3	Tarea SP14	Aplicación de la segunda derivada al análisis de la concavidad de funciones reales y económicas, orientada al trazado de curvas.	Geométrico Gráfico	Computacional
18	CP3	Tarea SP15	Aplicación de la derivada a la optimización del costo en la construcción de una caja sin tapa.	Descriptivo	Manipulativa
19	CP3	Tarea SP16	Modelamiento de la función costo para la construcción de una caja sin tapa.	Geométrico Simbólico	Algebraica
20	CP3	Tarea SP17	Aplicación de la derivada a la optimización del costo en la construcción de una caja sin tapa.	Simbólico	Computacional Algebraica
Sesión Trabajo Autónomo (TA)	**Campo de problemas (CP)**	**Acción didáctica**	**Objetivo de la acción didáctica**	**Lenguajes**	**Configuraciones**
1	CP1	Tarea TA1	Estudio de manuscrito teórico-práctico del curso, que considera la construcción de la ecuación de una recta tangente a una curva. Aplicación de la recta tangente a problemas económicos.	Simbólico Gráfica	Computacional Algebraica
2	CP1	Tarea TA2	Aplicación de la interpretación	Tabular Gráfica	Computacionales

			geométrica de la derivada.	Simbólico Descriptivo	Algebraica
3	CP2	Tarea TA3	Estudio de manuscrito teórico-práctico del curso, que considera el cálculo de derivadas utilizando el álgebra de derivadas y las reglas de derivación.	Simbólico	Computacional Algebraica
4	CP2	Tarea TA4	Estudio de manuscrito teórico-práctico del curso, que considera el uso de las reglas de derivadas para el cálculo de marginales.	Simbólico	Computacional Algebraica
5	CP3	Tarea TA5	Estudio de manuscrito teórico-práctico del curso, que considera la aplicación del criterio de la primera y segunda derivada a problemas clásicos de optimización de funciones reales y económicas.	Simbólico Gráfico	Computacional Algebraica
6	CP3	Tarea TA6	Estudio de manuscrito teórico-práctico del curso, que considera la aplicación de la primera derivada para el análisis de la monotonía de funciones reales y económicas.	Simbólico Gráfico	Computacional Algebraica
7	CP3	Tarea TA7	Estudio de manuscrito teórico-práctico del curso, que considera la aplicación de la segunda derivada	Simbólico Gráfica	Computacional Algebraica

			para la optimización de funciones reales y económicas.		
8	CP3	Tarea TA8	Estudio de manuscrito teórico-práctico del curso, que considera la aplicación de los criterios de primera y segunda derivada para la optimización de funciones económicas.	Simbólico Gráfica	Computacional Algebraica

Nota: Adaptación de Galindo Illanes et al. (2023).

Para comenzar el estudio de la derivada, es fundamental construir previamente el concepto de la recta tangente a una curva considerando las concepciones cartesiana y euclidiana (Galindo Illanes et al., 2022) es por ello que durante las sesiones presenciales de 1 a 4 (tareas SP1 y SP2), y la sesión de trabajo autónomo 1 (tarea TA1) se propone a los estudiantes resolver tareas que le permitirán ampliar la concepción euclidiana a la cartesiana, mediante la construcción de la recta tangente como límite de rectas secantes (Galindo Illanes et al., 2023). Además, con la intención de tematizar el esquema de recta tangente (Galindo Illanes et al., 2022) se consideran aplicaciones económicas, relacionando el concepto de pendiente de la recta secante con el de costo medio y el concepto de costo marginal como la aproximación de los costos medios calculados, destacando su equivalencia con la pendiente de la recta tangente.

Con el propósito de relacionar la pendiente de la recta tangente a una curva con la derivada de la función en el punto de tangencia, las sesiones presenciales 5 y 6 (Tarea SP3) se enfocan en el proceso de la identificación de la tendencia de las pendientes de las rectas secantes con la derivada de la función en el punto de tangencia (Galindo Illanes et al., 2023). En la sesión 2 de trabajo autónomo (Tarea TA2) se consolida la interpretación geométrica de la derivada, fortaleciendo el vínculo entre la recta tangente y la derivada en un punto.

Posteriormente, se articula la derivada de una función en un punto y su función derivada, a través de la sesión presencial 7 (Tarea SP4), que promueve el tránsito entre las representaciones gráfica, tabular y analítica de f', la expresión simbólica de la función $f(x)$ es conocida y se construye la función que cumplen todas las pendientes de las rectas tangentes, ésta corresponde a la función simbólica de $f'(x)$ (Font, 2005), entre los ejercicios desarrollados se considera el problema propuesto por Galindo y Breda (2023b). Luego se generaliza la función derivada como la función que a cada valor le hace corresponder la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(x, f(x))$. Finalmente, a través de la manipulación de un applet de *GeoGebra*, se espera que el estudiante interprete la función derivada $f'(x)$ como la función cuyas imágenes, $y_0 = f'(x_0)$, corresponden a las pendientes de las rectas tangentes a la función f en x_0.

La sesión presencial 8-9 (tarea SP5, SP6 y TA3) tiene el propósito de establecer la definición simbólica de la función derivada y el álgebra de ésta. Para ello, se utilizará un lenguaje mayormente simbólico y la configuración será algebraica.

Las sesiones presenciales de 10 a 12 (tarea SP7, SP8, SP9, TA3 y TA4) tienen por propósito, establecer las reglas de derivadas y aplicarlas junto álgebra de la función derivada. Si bien, al establecer las reglas de derivadas, el lenguaje será mayormente simbólico, también se utilizará un lenguaje gráfico, a través de un applet de GeoGebra que permitirá visualizar gráficamente la función derivada. Además, se propone a los estudiantes aplicar el álgebra de la función derivada y las reglas de derivación en el cálculo de funciones marginales, utilizando configuraciones algebraicas y un lenguaje simbólico.

En la sesión presencial de la 13 a la 15 (Tarea SP10, SP11, SP12, TA5 y TA6) se establece una articulación entre la interpretación geométrica de la derivada y el criterio de la primera derivada, a través del análisis de la monotonía de una función real. Utilizando un lenguaje mayormente gráfico y en menor medida simbólico. La configuración será computacional gracias a la integración de un applet de *GeoGebra*. Finalmente, se establecen los criterios de la primera y segunda derivada para la optimización de funciones reales y económicas, además de aplicar la primera derivada al trazado de curvas de funciones reales y económicas.

La sesión presencial 16-17 (Tarea SP13, SP14, TA7 y TA8) tienen como propósito aplicar el criterio de la segunda derivada a problemas clásicos de optimización de funciones reales y económicas. Su lenguaje será gráfico y simbólico, y las configuraciones serán algebraicas.

Finalmente, las sesiones de 18 a 20 tienen como propósito, consolidar de manera manipulativa la aplicación de los criterios de primera y segunda derivada para la optimización de una función costo (SP15, SP16, SP17). Utilizando un lenguaje mayormente gráfico y geométrico, y en menor medida simbólico y descriptivo. La configuración será computacional, manipulativa y algebraica.

Instrumentos de colecta de datos

Durante la implementación de las actividades y al finalizar cada campo de problemas se considera un instrumento evaluativo que permite realizar un análisis exploratorio del aprendizaje de los estudiantes. A continuación, por motivos de espacio se presentan una tarea representativa aplicada en cada campo de problemas.

La pregunta que representa el campo de problemas 1, proporcionará información en torno al conocimiento especializado del estudiante sobre tangentes, ya que durante el desarrollo deberá llevar a cabo la tematización del esquema de recta tangente y concluir el significado geométrico de la derivada en un punto para dar respuesta al enunciado (figura 1).

Tarea 1. Se sabe que la función $\boldsymbol{Ingreso}$ $(\boldsymbol{I})$ está dada por $\boldsymbol{I(q) = q^2}$, con $\boldsymbol{q \geq 0}$, donde q representa unidades.

Se sabe que la gráfica de la función $Ingreso$ (I) es:

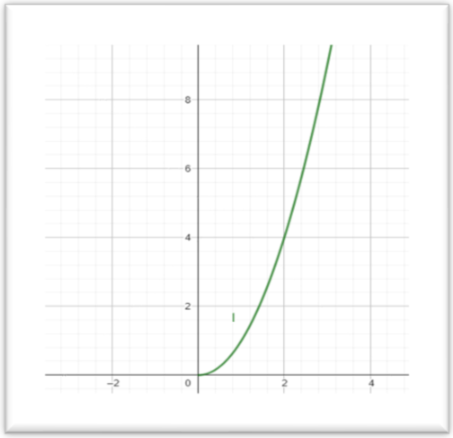

Gráfico 1: Función $Ingreso\ (I(q))$

y la gráfica de la función Ingreso Marginal es:

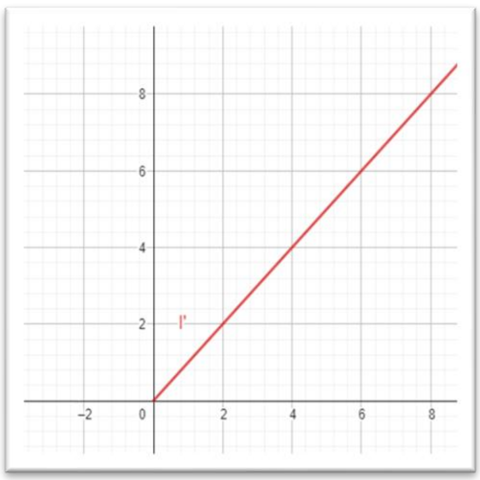

Gráfico 2: Función $Ingreso\ Marginal$

a) Justificando adecuadamente determine la pendiente de la recta tangente a la función ingreso en $q = 1, q = 4\ y\ q = 0$.
b) Determine la ecuación de la recta tangente a la función ingreso en $q = 4\ y\ q = 0$.
c) Determine dónde el $Ingreso\ Marginal$ es positivo, negativo o igual a 0. Considerando que se trabaja con unidades.
d) Explique con sus propias palabras el comportamiento de la función Ingreso y su relación con la gráfica del ingreso marginal.

Figura 1. *Tarea 1 aplicada a los estudiantes al finalizar el campo de problemas sobre tangente (CP1).* (Galindo Illanes et al., 2023).

En esta tarea el estudiante debe analizar los gráficos estableciendo la información que permitirá determinar las pendientes de las rectas tangentes solicitadas y la posterior construcción de éstas. Por ejemplo: Para determinar la pendiente de la recta tangente en $q = 4$, el estudiante debe observar el gráfico 2 y establecer que la pendiente de la recta tangente es $I'(4) = m_{tg}$ =8. Finalmente, el estudiante puede construir la ecuación de la recta tangente ($I = 8q - 16$), observando del gráfico 1 que $I(4) = 16$.

A continuación, la pregunta que representa el campo de problemas 2, proporcionará información en torno a la aplicación de las reglas de derivadas y el álgebra de la función derivada en el cálculo de funciones marginales, utilizando configuraciones algebraicas y un lenguaje simbólico (figura 2).

Tarea 2. Considere la siguiente función costo e ingreso en unidades monetarias [UM]:

$$C(q) = \frac{q^4}{4} + \frac{2q^3}{3} - \frac{11q^2}{2} + 12q$$

$$r(q) = q^3 + \frac{2}{5q^2} + 40q$$

a) Calcule e interprete el costo marginal ($C'(q)$) y el ingreso marginal ($r'(q)$) de producir la unidad número 11. No olvide indicar el álgebra de derivadas utilizadas y las reglas de derivación.

b) Luego de realizar los cálculos en a), ¿Es conveniente producir la unidad número 11?

Figura 2. *Tarea 2 aplicada a los estudiantes al finalizar el campo de problemas sobre cálculo de derivadas a partir de reglas y teoremas de derivación (CP2)*. Elaboración de las autoras.

En esta tarea, se espera que el estudiante aplique el álgebra de las derivadas y las reglas de derivadas para el cálculo del costo marginal y del ingreso marginal, además debe indicarlas en orden a medida que fueron utilizadas. Por ejemplo: Considerando f y g funciones reales continuas, c y n una constante real, $n \neq -1$.

$$r'(q) = \left(q^3 + \frac{2}{5q^2} + 40q\right)'$$

$$= (q^3)' + \left(\frac{2}{5q^2}\right)' + (40q)'$$

Álgebra de la derivada

$$(f+g)' = (f)' + (g)'$$

$$= (q^3)' + \frac{2}{5}(q^{-2})' + 40(q)'$$

Álgebra de la derivada

$$(c \cdot f)' = c \cdot (f)'$$

$$= 3q^2 + \frac{2}{5} \cdot -2 \cdot q^{-3} + 40 \cdot 1$$

Regla de derivadas

$$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$$

Ingreso marginal

$$r'(q) = 3q^2 - \frac{4}{5q^3} + 40$$

Luego, para determinar si es conveniente producir la unidad número 11. Se espera que el estudiante evalúe las funciones marginales del ingreso y costo en q=10, para poder predecir la conveniencia de la producción de la unidad número 11. En decir,

$$r'(10) = 3 \cdot 10^2 - \frac{4}{5 \cdot 10^3} + 40 = \frac{424999}{1250} \approx 340$$

$$c'(10) = 10^3 + 2 \cdot 10^2 - 11 \cdot 10 + 12 = 1102$$

El estudiante debe concluir que, como $c'(10) > r'(10)$, no es conveniente producir la unidad número 11.

Finalmente, se presenta una de las preguntas del instrumento que se aplicará al finalizar el campo de problemas 3. El cual nos permite analizar la comprensión del estudiante en torno a la relación que existe entre la representación gráfica de la función y de su derivada f', a través del criterio de la primera derivada para extremos relativos y el análisis de la monotonía (figura 3).

Tarea 3. Para un producto la función de ingreso es $I(q) = 450q - 4q^2$ y la función de costo total es $c(q) = 0.004q^3 + 20q + 5000$. Determinar:
a) La monotonía de la función utilidad.
b) ¿A qué nivel de producción se maximiza la utilidad y cuál es la utilidad máxima?
c) Con la información obtenida, realice un bosquejo de la función utilidad.

Figura 3. *Tarea 3 que se aplicará a los estudiantes al finalizar el campo de problemas aplicaciones de la derivada para el cálculo de máximos y mínimos, y análisis de gráficas de funciones (CP3)*. Elaboración de las autoras.

En este problema se espera que el estudiante modele la función utilidad, es decir:

$$U(q) = -0.004q^3 - 4q^2 + 430q - 5000, \; q \geq 0$$

Luego se espera que derive la función utilidad y analice para qué valores reales de q:

$$U'(q) = 0, \; U'(q) > 0, \; U'(q) < 0$$

Esto permitirá al estudiante determinar la monotonía de la función utilidad, posteriormente aplicar el criterio de la primera derivada para extremos relativos obteniendo de esta forma el nivel de producción que maximiza la utilidad y la utilidad máxima. Finalmente, con la información de la monotonía de la función utilidad y los extremos relativos, el estudiante podrá realizar un bosquejo.

Método de análisis

Luego de aplicar los instrumentos evaluativos, al finalizar la implementación del diseño instruccional, se realizó un análisis de tipo mixto (Johnson & Onwuegbuzie, 2004), por medio de la noción de configuraciones de los objetos primarios del EOS, que nos permitirá realizar un análisis exploratorio, cuantificando la cantidad de acciones correctas (frecuencia) relacionadas a las resoluciones de los estudiantes en los problemas propuestos para cada uno de los objetos primarios. Además, desde el punto de vista cualitativo, será posible identificar las respuestas y argumentos correctos e incorrectos de los estudiantes al resolver las tareas propuestas.

Análisis y resultados

A continuación, se presentan algunos resultados obtenidos por los 90 estudiantes de Ingeniería Comercial. Además, se realiza un análisis exploratorio evidenciando con imágenes los procedimientos y argumentos de las respuestas de algunos estudiantes.

La tabla 3 explicita los resultados de la Tarea 1 que contestaron los estudiantes de Ingeniería Comercial, se observa que el 93% de los estudiantes identifica la relación entre la función ingreso y su marginal, y por consiguiente comprenden que la función ingreso marginal proporciona las pendientes de las rectas tangentes, es decir, realiza el proceso correcto de tematización de la recta tangente en la interpretación geométrica de la derivada. Además, debemos observar que el 78% identifican las pendientes de las rectas tangente a la función ingreso, observando la función ingreso marginal. Finalmente, el 42% de los estudiantes justifica correctamente el vínculo que existe entre la función ingreso marginal y la función ingreso, para el análisis de la monotonía de la función ingreso.

Estos resultados evidencian el aprendizaje de la tangente a una curva, la interpretación geométrica de la derivada y la aplicación de la derivada en el análisis marginal. Además, indican una mejora en la construcción de la concepción cartesiana de la recta tangente, superando de esta forma las dificultades evidenciadas por las investigaciones previas (Biza & Zachariades, 2010; Galindo Illanes et al., 2022; Orts Muñoz et al., 2016; Santi, 2011).

Tabla 3

Frecuencia de aciertos de la Tarea 1 (n=90).

Acciones para los problemas sobre tangentes (CP1)	**Objetos primarios**	**Frecuencia absoluta**	**Frecuencia relativa (%)**
Justifica correctamente el vínculo que existe entre la función ingreso marginal y la función ingreso, para el cálculo de rectas tangentes.	Argumento	84	93
Relaciona correctamente la pendiente de la recta tangente a la curva con la derivada de la función en el punto de tangencia.	Definición	84	93
Identifica las pendientes de las rectas tangentes a la función ingreso.	Representación	70	78
Utiliza correctamente la fórmula de la ecuación de la recta punto-pendiente.	Procedimiento	65	72
Justifica correctamente el vínculo que existe entre la función ingreso marginal y la función ingreso, para el análisis de la monotonía de la función ingreso.	Argumento	38	42

Nota: elaboración de las autoras.

En la figura 4, se observa que un estudiante identifica las pendientes de las rectas tangentes observando la función ingreso marginal, es decir, conoce el vínculo existente entre la función ingreso y su marginal. Además, construye correctamente las ecuaciones de las rectas tangentes a la función ingreso realizando el proceso correcto de tematización de la recta tangente en la interpretación geométrica de la derivada.

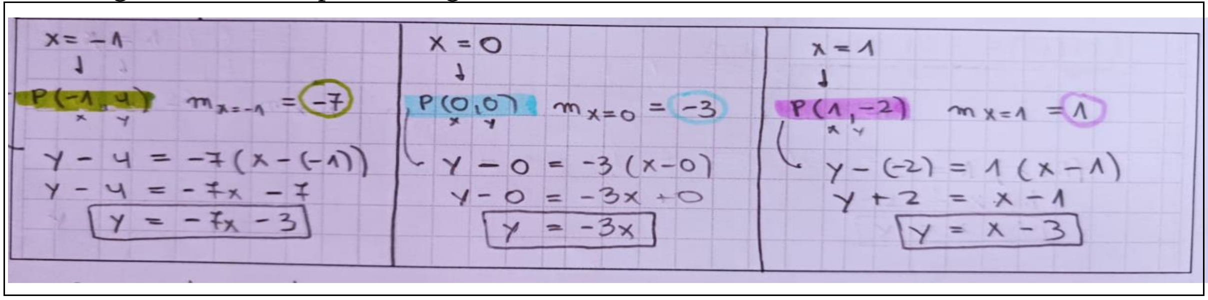

Figura 4. *Desarrollo correcto de un estudiante en la construcción de la recta tangente a la función ingreso.*

La figura 5, muestra que, si bien el estudiante comprende que la gráfica de la función derivada le proporcionará las pendientes de las rectas tangentes, aún presenta algunas ambigüedades al momento de definirla, manifestando que "Derivada es lo mismo que pendiente". Ese tipo de ambigüedad puede estar relacionada con el lenguaje utilizado por el profesor al momento de explicar la definición de derivada, por ejemplo, al utilizar expresiones metafóricas o un lenguaje simplificado para facilitar la comprensión del estudiante (Löbner, 2013), o bien, puede estar relacionada por una disparidad de significado que tiene el propio sujeto al momento de interpretar la definición de la derivada (Godino et al., 2007).

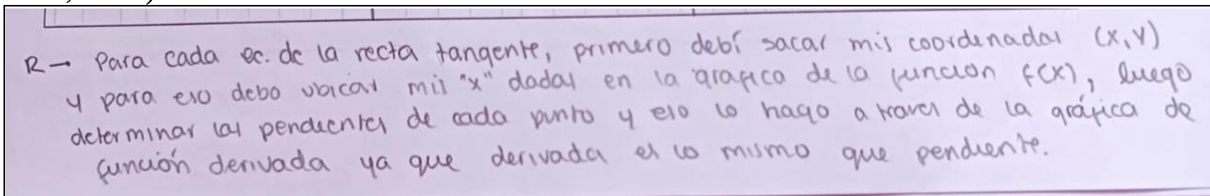

Figura 5. *Ambigüedad de un estudiante al referirse a la derivada.*

La figura 6, muestra que un estudiante, intuye la función algebraica que corresponde a la gráfica de la función ingreso, luego de eso obtiene su derivada, utilizando las reglas de derivación y construye las ecuaciones de las rectan tangente solicitadas. Esto indica que el estudiante comprende que la derivada le proporcionará las pendientes de las rectas tangentes que necesita, sin embargo, no vincula la derivada del ingreso con su marginal.

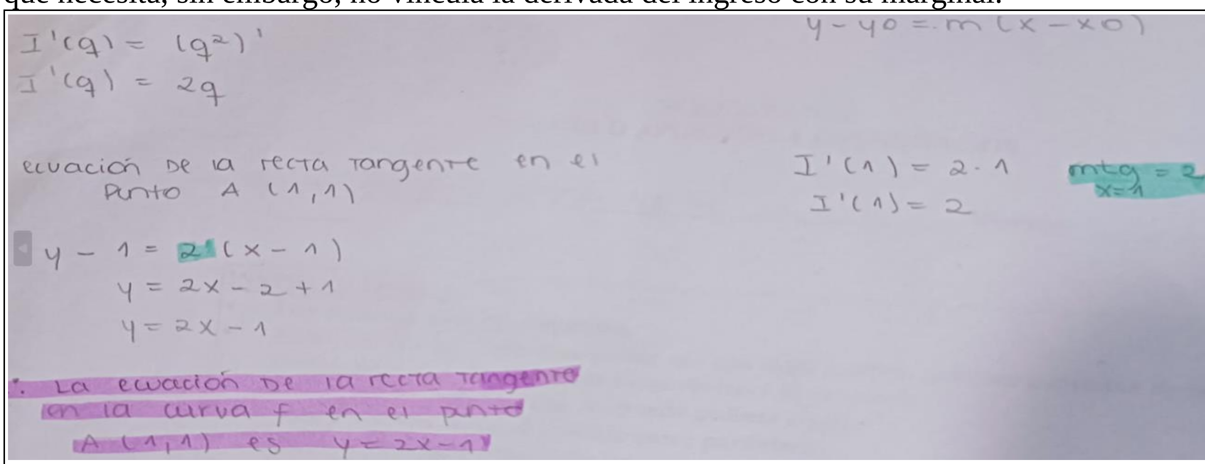

Figura 6. *Desarrollo algebraico de un estudiante en la construcción de la recta tangente a la función ingreso*.

La figura 7 muestra la justificación de un estudiante, en torno al vínculo que existe entre la función ingreso marginal y la función ingreso, para el análisis de la monotonía de la función ingreso. Sin embargo, se observa una imprecisión en la definición de punto crítico.

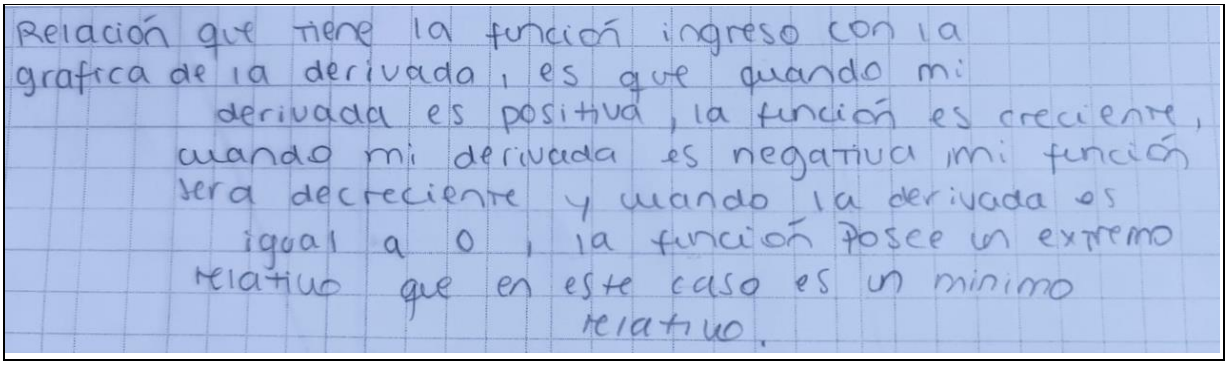
Relación que tiene la función ingreso con la
grafica de la derivada, es que cuando mi
derivada es positiva, la función es creciente,
cuando mi derivada es negativa mi función
sera decreciente y cuando la derivada es
igual a 0, la función posee un extremo
relativo que en este caso es un minimo
relativo.

Figura 7. *Justificación de un estudiante del comportamiento de la función Ingreso y su relación con la gráfica del ingreso marginal.*

La tabla 4 presenta los resultados de la Tarea 2 que contestaron los estudiantes de Ingeniería Comercial, se observa que el 97% identifica y el 94% aplica de manera correcta el álgebra de las derivadas. Además, que el 89% identifica y el 78% aplica correctamente las reglas de derivadas. Sin embargo, sólo el 44% de los estudiantes aplicó correctamente la derivada en el análisis marginal y tomaron la decisión correcta. Estos resultados indican que las actividades realizadas en el diseño instruccional permitieron que los estudiantes realizaran correctamente el cálculo de derivadas a partir de reglas y teoremas de derivación. Sin embargo, se observan dificultades al aplicar la derivada para la toma de decisiones.

Tabla 4

Frecuencia de aciertos de la Tarea 2 (n=90)

Acciones para los problemas sobre cálculo de derivadas a partir de reglas y teoremas de derivación (CP2)	**Objetos primarios**	**Frecuencia absoluta**	**Frecuencia relativa (%)**
Indica correctamente el álgebra de las derivadas utilizadas para el cálculo de las marginales.	Proposiciones	87	97
Aplica correctamente el álgebra de las derivadas en el cálculo de marginales.	Procedimiento	85	94
Indica las reglas de derivación utilizadas para el cálculo de las marginales.	Proposiciones	80	89
Aplica correctamente las reglas de derivación en el cálculo de marginales.	Procedimiento	70	78
Evalúa el costo marginal en $q = 10$, para tomar una decisión en torno a la unidad número 11.	Procedimiento	40	44
Evalúa el ingreso marginal en $q = 10$, para tomar una decisión en torno a la unidad número 11.	Procedimiento	40	44
Justifica correctamente que es conveniente producir la unidad número 11.	Argumento	40	44

Nota: elaborado por las autoras.

La figura 8 muestra la construcción, de un estudiante, de la función costo marginal, indicando las reglas y álgebra de la derivada de manera correcta. Es decir, el estudiante aplica la derivada para la obtención de las marginales.

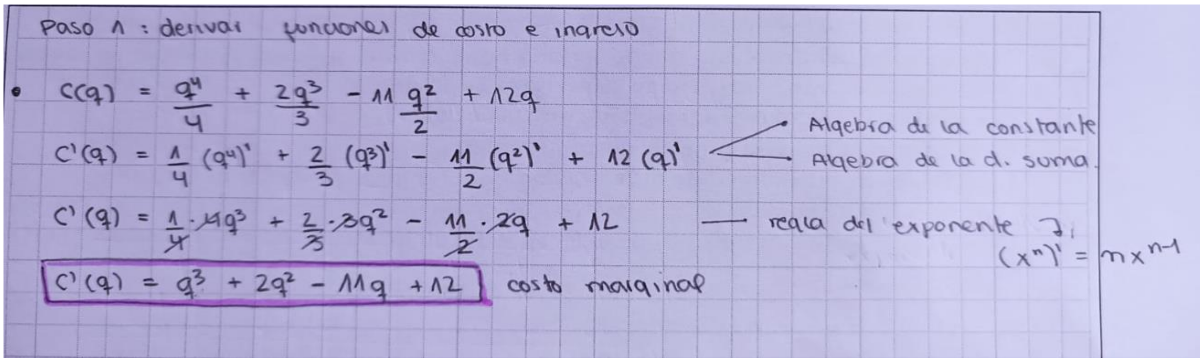

Figura 8. *Procedimiento de un estudiante para la obtención del costo marginal.*

La figura 9 muestra la interpretación correcta de la función costo marginal e ingreso marginal, al evaluarse en $q = 10$. Al estudiante se le solicita predecir para la unidad número 11 por lo que decide evaluar en la unidad 10, es decir, el estudiante aplica la derivada en marginales e interpreta correctamente.

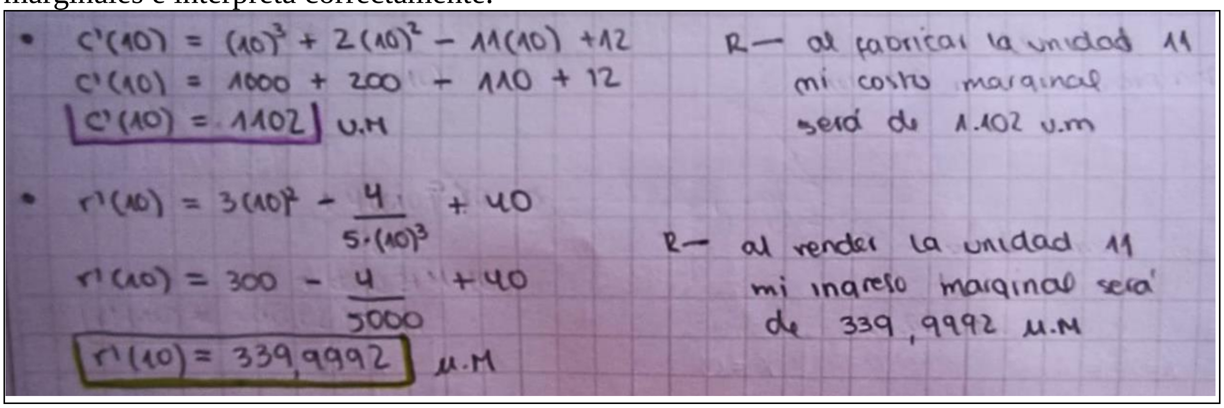

Figura 9. *Interpretación del costo marginal e ingreso marginal al evaluar en* $q = 10$.

La figura 10 expone la justificación correcta en la toma de decisión en torno a la producción de la unidad número 11, para ello el estudiante utiliza el costo marginal e ingreso marginal evaluado en $q = 10$.

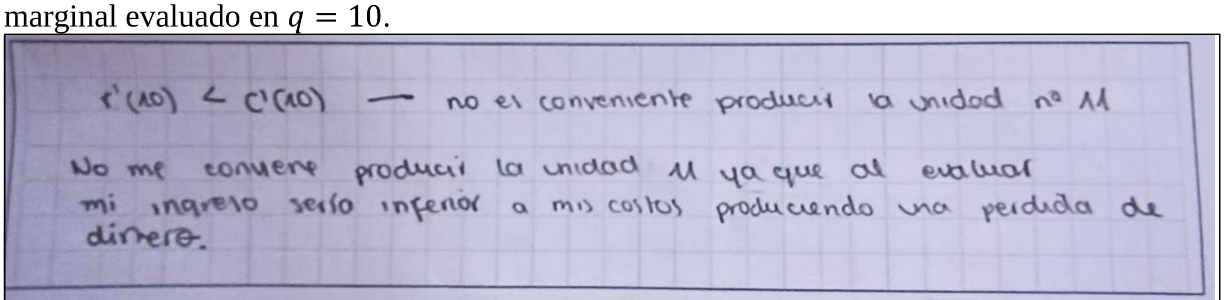

Figura 10. *Justificación de no producir la unidad número 11.*

La tabla 5 presenta los resultados de la Tarea 3 que contestaron los participantes, se observa que el 98% de los estudiantes modela correctamente la función utilidad y determina su derivada aplicando las reglas y teoremas de derivación, el 78% identifica los valores críticos y el 76% identifica los intervalos donde $U'(q) > 0$ y $U'(q) < 0$. Los errores observados son mayormente aritméticos y de álgebra básica, es decir conocimientos previos. El 70% de los estudiantes aplica correctamente la derivada para el análisis de la monotonía de la función, sin embargo, el 56% comprende que los valores críticos son posibles extremos y el 53% que deben ser analizados utilizando el criterio de la primera derivada para extremos relativos. Finalmente, sólo el 39% de los estudiantes realizó el bosquejo de la función utilidad. Los resultados indican que, si bien los estudiantes aplican la derivada para el cálculo de máximos y mínimos y análisis de gráficas de funciones, todavía se observan limitaciones, producto de la complejidad de los objetos matemáticos necesarios para construir la derivada, específicamente, función real, gráfico de funciones reales y ecuaciones.

Tabla 5

Frecuencia de aciertos de la Tarea 3 (n=90)

Acciones para los problemas sobre aplicaciones de la derivada para el cálculo de máximos y mínimos, y análisis de gráficas de funciones (CP3)	**Objetos primarios**	**Frecuencia Absoluta**	**Frecuencia relativa**
Modela correctamente la función utilidad.	Definición	88	98
Determina la derivada de la función utilidad, utilizando correctamente las reglas y álgebra de las derivadas.	Proposiciones	88	98
Determina correctamente los valores de q en el dominio, tal que $U'(q) = 0$	Procedimiento	70	78
Determina correctamente los valores de q en el dominio, tal que $U'(q) > 0$	Procedimiento	68	76
Determina correctamente los valores de q en el dominio, tal que $U'(q) < 0$	Procedimiento	68	76
Relaciona correctamente $U'(q) > 0$ con el crecimiento de la función utilidad	Proposiciones	63	70
Relaciona correctamente $U'(q) > 0$ con el decrecimiento de la función utilidad	Proposiciones	63	70
Relaciona los valores de q tales que $U'(q) = 0$ con los posibles extremos de la función utilidad.	Proposiciones	50	56
Aplica correctamente el criterio de la primera derivada para determinar el nivel de producción en el que se alcanza la utilidad máxima.	Proposiciones	48	53
Determina justificando correctamente la utilidad máxima	Argumento	48	53

El bosquejo realizado describe correctamente la monotonía y extremos de la función utilidad.	Procedimiento	35	39

La figura 11 muestra el modelamiento correcto de la función utilidad y su derivada. Es decir, el estudiante comprende que para optimizar la función utilidad requiere trabajar con su función derivada.

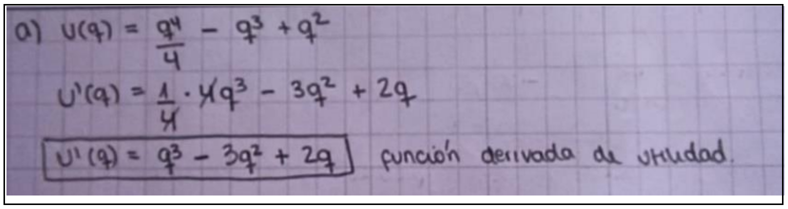

Figura 11. *Función utilidad y su derivada construida correctamente por un estudiante.*

La figura 12 muestra la obtención de los valores críticos resolviendo la ecuación generada al igualar a cero la derivada de la función utilidad. Es decir, el estudiante conoce la definición de puntos críticos y resuelve correctamente una ecuación de tercer grado utilizando algebra básica, debemos observar que la función derivada no presenta discontinuidades.

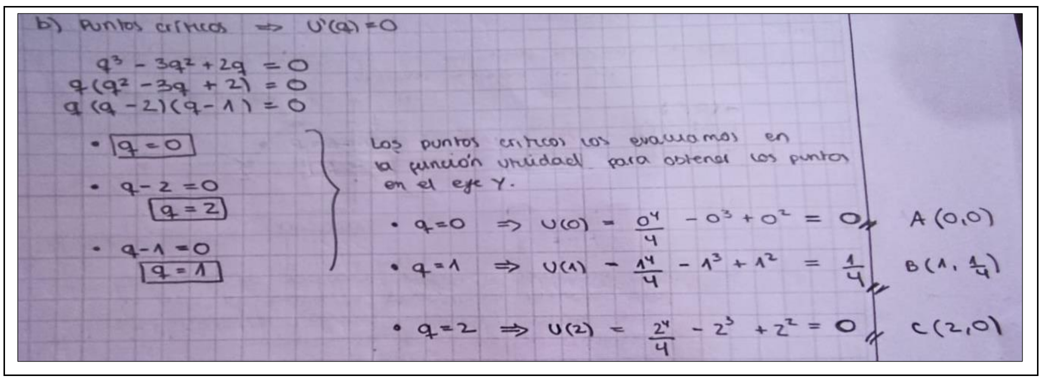

Figura 12**.** *Obtención de los puntos críticos de la función utilidad*

La figura 13 muestra la respuesta de un estudiante en torno a la producción y venta de 1.000.000 para alcanzar la utilidad máxima. Es decir, el estudiante aplica correctamente la derivada para la optimización de funciones económicas.

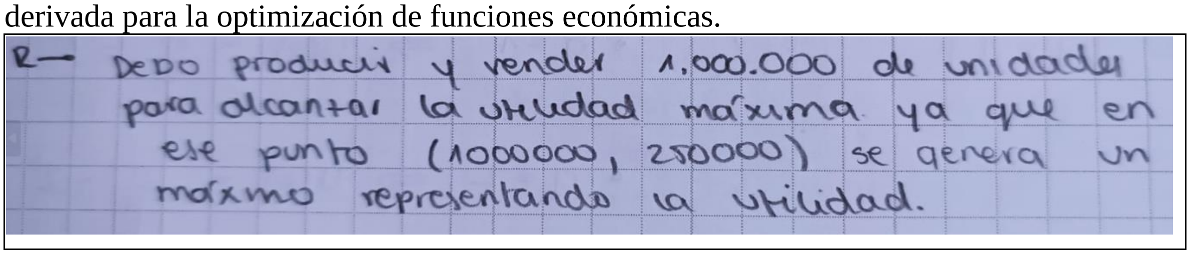

Figura 13. *Justificación de la optimización de la función utilidad.*

Conclusiones

El objetivo de ese artículo fue presentar los resultados de la implementación de un diseño instruccional de enseñanza de la derivada para futuros ingenieros comerciales en

Chile. Para ello, el diseño instruccional aplicado consideró diversas configuraciones ontosemióticas en las situaciones-problemas contextualizadas sobre tangentes, aplicaciones de la derivada para el cálculo de máximos y mínimos, análisis de gráficas de funciones, y el cálculo de derivadas a partir de reglas y teoremas de derivación. Además, se ha incorporado las TIC en las diversas tareas, favoreciendo el tránsito entre los tipos de lenguajes escrito, numérico, gráfico y simbólico (Galindo Illanes et al., 2023; Galindo Illanes & Breda, 2023b).

Los resultados apuntan que los estudiantes que participaron de esa implementación, aunque presentaron algunas limitaciones, tales como la dificultad en el bosquejo de la función utilidad o la aplicación de la derivada para la tomada de decisiones, evidenciaron el aprendizaje sobre la tangente a una curva, la interpretación geométrica de la derivada y la aplicación de la derivada en el análisis marginal, indicando una mejora en la construcción de la concepción cartesiana de la recta tangente.

Esos resultados están directamente relacionados con los aspectos innovadores de esta investigación. El primer aspecto fue la utilización transversal, en toda la unidad didáctica, de recursos TIC (*applets*, *GeoGebra*, códigos QR). El segundo aspecto fue el tiempo dedicado, en la programación, a la interpretación geométrica de la derivada, una vez que fue esa noción la que permitió a los estudiantes resolver una mayor variabilidad de problemas presentes en la carrera de Ingeniería Comercial, tales como los de optimización. Además, fue a partir de la interpretación geométrica de la derivada que los participantes elaboraron de forma global la construcción del concepto de la derivada. El tercero aspecto fueron los problemas de aplicación. En esta investigación se ha trabajado, por ejemplo, grafica de funciones y optimización de funciones vinculados al contexto de Economía y Negocios. Estos aspectos, en nuestra visión, han posibilitando a los estudiantes construir de manera progresiva el significado de la derivada.

Una de las limitaciones del estudio fue el insuficiente tiempo destinado al desarrollo de las tareas por parte de los participantes, dado que ellos no tenían todos los conocimientos previos necesarios para la comprensión de los nuevos conceptos. Por ejemplo, para que el estudiante pudiera realizar una tarea sobre la interpretación geométrica de la derivada, fue necesario destinar tiempo para retomar conocimientos previos sobre funciones. Otra limitación se ha dado por las fallas de conexión con la internet, dificultando la accesibilidad de los alumnos al material, ya que deberían conectar sus móviles a los códigos QR para accederlos.

Como perspectiva futura, para una mejor formación de ingenieros comerciales, se hace necesario un cambio en los programas de las asignaturas que incluyen la enseñanza de la derivada, a fin de que estos contemplen explícitamente una más completa y significativa variabilidad de campos de problema, incorporando la complejidad de la derivada, en particular, su interpretación geométrica, dado que es la noción que más se utiliza en la Ingeniería Comercial. Además, se hace necesario un proceso de formación de los profesores que forman a esos futuros ingenieros, habilitándolos en la enseñanza de los diferentes significados de la derivada, sus diferentes campos de problemas, representaciones, procedimientos, argumentos, proposiciones y aplicaciones contextuales junto a los recursos TIC.

Financiamiento

Vicerrectoría de Investigación y Doctorado de la Universidad San Sebastián (USS-FIN-23-DOCI-04); MCIN/AEI/10.13039/501100011033/ y por "FEDER Una manera de hacer Europa" (PID2021-127104NB-I00).

Consentimiento informado

Los autores declaran documentar el consentimiento informado firmado por los participantes del estudio.

Conflicto de intereses

Los autores declaran no tener algún conflicto de interés.

Declaración de la contribución de los autores

Todos los autores afirmamos que se leyó y aprobó la versión final de este artículo.

El porcentaje total de contribución para la conceptualización, preparación y corrección de este artículo fue el siguiente: M.K.G.I. 50 % y A.B. 50 %.

Declaración de disponibilidad de los datos

Los datos que respaldan los resultados de este estudio serán puestos a disposición por el autor correspondiente M.K.G.I. y A.B., previa solicitud razonable.

Referencias

Ariza Cobos, Á., & Linares Ciscar, S. (2009). Sobre la aplicación y uso del concepto de derivada en el estudio de conceptos económicos en estudiantes de Bachillerato y Universidad. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, *27*(1), 127-136. https://doi.org/https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.3667

Ballard, C. L., & Johnson, M. F. (2004). Basic math skills and performance in an introductory economics class. *The Journal of Economic Education*, *35*(1), 3-23. https://doi.org/https://doi.org/10.3200/JECE.35.1.3-23

Biza, I., & Zachariades, T. (2010). First year mathematics undergraduates' settled images of tangent line. *The Journal of Mathematical Behavior*, *29*(4), 218-229. https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2010.11.001

Butler, J. S., Finegan, T. A., & Siegfried, J. J. (1994). Does more calculus improve student learning in intermediate micro and macro-economic theory? *The American Economic Review*, *84*(2), 206-210. https://doi.org/https://www.jstor.org/stable/2117830

Font, V., Godino, J. D., & Gallardo, J. (2013). The emergence of objects from mathematical practices. *Educational Studies in Mathematics*, *82*(1), 97-124. https://doi.org/https://doi.org/10.1007/s10649-012-9411-0

Galindo Illanes, M. K., & Breda, A. (2022a). El tratamiento de la derivada en el plan de estudios de Ingeniería Comercial en Chile. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas, & J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (pp. 285-293). SEIEM.

Galindo Illanes, M. K., & Breda, A. (2022b). Estudo da derivada com o uso das TIC realizado com estudantes de engenharia no Chile. En C. A. Hauschild Johann & S. Nunes Lopes (Eds.), *Docência e ciência: [re]valorização do conhecimento* (1.ª ed., Vol. 1, pp. 110-117). Editora Univates.

Galindo Illanes, M. K., & Breda, A. (2023a). A derivada no plano de estudos dos cursos de Engenharia Comercial no Chile. En A. L. Manrique & C. L. O. Groenwald (Eds.), *Anais do IX Congresso Iberoamericano de Educação Matemática* (pp. 2173-2183). Editora Akadem.

Galindo Illanes, M. K., & Breda, A. (2023b). Significados de la derivada en los libros de texto de las carreras de Ingeniería Comercial en Chile. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *37*(75), 271-295. https://doi.org/10.1590/1980-4415v37n75a13

Galindo Illanes, M. K., Breda, A., & Alvarado Martinez, H. (2023). Diseño de un proceso de enseñanza de la derivada para estudiantes de Ingeniería Comercial en Chile. *PARADIGMA*, *44*(4), 321-350. https://doi.org/10.37618/paradigma.1011-2251.2023.p321-350.id1386

Galindo Illanes, M. K., Breda, A., Manríquez, D. D. C., & Martínez, H. A. A. (2022). Analysis of a teaching learning process of the derivative with the use of ICT oriented to engineering students in Chile. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, *18*(7), em2130. https://doi.org/https://doi.org/10.29333/ejmste/12162

García, L., Azcárate, C., & Moreno, M. (2006). Creencias, concepciones y conocimiento profesional de profesores que enseñan cálculo diferencial a estudiantes de ciencias económicas. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, *9*(1), 85-116. https://doi.org/https://www.scielo.org.mx/scielo.php?pid=S1665-24362006000100005&script=sci_arttext

Godino, J. D. (2014). Síntesis del enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática: motivación, supuestos y herramientas teóricas. En *Universidad de Granada* (pp. 1-60). http://www. ugr. es/local/jgodino/eos/sintesis_EOS_24agosto14. pdf

Godino, J. D., & Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en didactique des Mathématiques*, *14*(3), 325-355.

Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM - International Journal on Mathematics Education*, *39*(1-2), 127-135. https://doi.org/10.1007/s11858-006-0004-1

Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2019). The onto-semiotic approach: Implications for the prescriptive character of didactics. *For the Learning of Mathematics*, *39*(1), 37-42. https://www.jstor.org/stable/26742011

Hey, J. D. (2005). I teach economics, not algebra and calculus. *The Journal of Economic Education*, *36*(3), 292-304. https://doi.org/https://doi.org/10.3200/JECE.36.3.292-304

Johnson, R. B., & Onwuegbuzie, A. J. (2004). Mixed methods research: A research paradigm whose time has come. *Educational researcher*, *33*(7), 14-26. https://doi.org/https://doi.org/10.3102/0013189X033007014

Larios, V., & Jiménez, A. (2022). Significados parciales de la derivada en libros universitarios en la formación de ingenieros. *Praxis & Saber*, *13*(33), e12274-e12274. https://doi.org/https://doi.org/10.19053/22160159.v13.n33.2022.12274

Larios, V., Murillo, R. E. P., & Reyes, H. M. (2021). Significados sobre la derivada evidenciados por alumnos de carreras de Ingeniería en una universidad mexicana. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, *20*(20), 105-124. https://doi.org/10.35763/AIEM20.4002

Löbner, S. (2013). *Understanding semantics*. Routledge.

Orts Muñoz, A., Llinares Ciscar, S., & Boigues Planes, F. J. (2016). Elementos para una Descomposición Genética del concepto de recta tangente. *Avances de investigación en educación matemática*, *10*, 111-134. https://doi.org/https://doi.org/10.35763/aiem.v0i10.164

Pino-Fan, L. R., Castro, W. F., Godino, J. D., & Font, V. (2013). Idoneidad epistémica del significado de la derivada en el currículo de bachillerato. *Paradigma*, *34*(2), 129-150. https://doi.org/http://ve.scielo.org/scielo.php?pid=S1011-22512013000200008&script=sci_arttext

Pino-Fan, L. R., Godino, D. J., & Font, V. (2015). Una propuesta para el análisis de las prácticas matemáticas de futuros profesores sobre derivadas. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *29*(51), 60-89. https://doi.org/https://doi.org/10.1590/1980-4415v29n51a04

Pino-Fan, L. R., Godino, J. D., & Font, V. (2011). Faceta Epistémica Del Conocimiento Didáctico-Matemático sobre la Derivada. *Educ. Matem. Pesq.*, *13*, 141-178. https://doi.org/http://funes.uniandes.edu.co/24491/1/Pino-Fan2011Faceta.pdf

Pino-Fan, L. R., Godino, J. D., & Font, V. (2016). Assessing key epistemic features of didactic-mathematical knowledge of prospective teachers: the case of the derivative. *Journal of Mathematics Teacher Education 2016 21:1*, *21*(1), 63-94. https://doi.org/10.1007/S10857-016-9349-8

Rodríguez-Nieto, C., Rodríguez-Vásquez, F., & Font, V. (2022). Nueva mirada para analizar las conexiones desde dos lentes teóricos: la teoría ampliada de las conexiones matemáticas y el enfoque ontosemiótico. En J. G. Lugo-Armenta, L. R. Pino_fan, M.

Pochulu, & W. F. Castro (Eds.), *Enfoque Onto-Semiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos: investigaciones y desarrollos en América Latina* (1.ª ed., Vol. 1, pp. 193-219). Universidad de Lagos.

Santi, G. (2011). Objectification and semiotic function. *Educational Studies in Mathematics 2011 77:2*, *77*(2), 285-311. https://doi.org/10.1007/S10649-010-9296-8