A ESCALA DOS NÚMEROS NA TEORIA DA OBJETIVAÇÃO PARA A MOBILIZAÇÃO DE SABERES MATEMÁTICOS

Andressa Gomes dos Santos, Ana Carolina Costa Pereira

https://doi.org/10.1590/SciELOPreprints.4409

Submetido em: 2022-07-08
Postado em: 2022-07-21 (versão 1)
(AAAA-MM-DD)

ARTIGO

A ESCALA DOS NÚMEROS NA TEORIA DA OBJETIVAÇÃO PARA A MOBILIZAÇÃO DE SABERES MATEMÁTICOS

ANDRESSA GOMES DOS SANTOS[1]
ORCID: http://orcid.org/0000-0003-1982-714X
ANA CAROLINA COSTA PEREIRA[2]
ORCID: http://orcid.org/0000-0002-3819-2381

RESUMO: No rol de pesquisas que focam na Educação Matemática, foca-se em possibilidades didáticas para o ensino dessa disciplina. Uma alternativa apresentada em estudos nacionais é a construção de uma interface entre história e ensino de Matemática desenvolvida por Saito e Dias (2013). Neste artigo, apropriou-se da escala dos números elaborada por Edmund Gunter (1581 – 1626) apresentada no tratado *The description and vse of the Sector, the Crosse-staffe, and other instruments, for such as are studious of Mathematicall practise* publicado em 1623 para a construção de uma interface. Assim, obejtivou-se analisar os saberes matemáticos mobilizados em uma atividade aplicada com licenciandos em Matemática a partir do manuseio da escala dos números. Como metodologia utilizou-se a Teoria da Objetivação (TO) e para a análise dos dados encaxou-se a análise semiótica indicada pela TO. Os resultados obtidos giram em torno de saberes matemáticos distintos mobilizados e articulados entre si. Conclui-se que ocorreu a mobilização de saberes como o de logaritmo, mediatriz e construção geométrica a partir da atividade confeccionada.

Palavras-chave: interface entre história e ensino de Matemática, Teoria da Objetivação, escala dos números.

THE LINE OF NUMBERS IN THE THEORY OF OBJECTIFICATION FOR THE MOBILIZATION OF MATHEMATICAL KNOWLEDGE

ABSTRACT: In the list of researches that focus on Mathematics Education, it focuses on didactic possibilities for the teaching of this discipline. An alternative presented in national studies is the construction of an interface between history and mathematics teaching developed by Saito and Dias (2013). In this article, he appropriated the line of numbers elaborated by Edmund Gunter (1581 – 1626) presented in the treatise The description and vse of the Sector, the Crosse-staffe, and other instruments, for such as are studious of Mathematicall practise published in 1623 for building an interface. Thus, the objective was to analyze the mathematical knowledge mobilized in an applied activity with undergraduates in Mathematics from the handling of the scale of numbers. As a methodology, the Theory of Objectification (OT) was used and for the data analysis, the semiotic analysis indicated by the TO was fitted. The results obtained revolve around different mathematical knowledge mobilized and articulated with each other. It is concluded that the mobilization of knowledge such as logarithm, mediatrix and geometric construction took place from the activity carried out.

Keywords: interface between history and mathematics teaching, Theory of Objectification, line of numbers.

---

[1] Universidade Estadual do Ceará. Fortaleza, Ceará (CE), Brasil. <andressaa.santos@uece.br>
[2] Universidade Estadual do Ceará. Fortaleza, Ceará (CE), Brasil. <carolina.pereira@uece.br>

LA ESCALA DE NÚMEROS EN LA TEORÍA DE LA OBJETIVACIÓN PARA LA MOVILIZACIÓN DEL CONOCIMIENTO MATEMÁTICO

RESUMEN: En el listado de investigaciones que se enfocan en la Educación Matemática, se enfoca en las posibilidades didácticas para la enseñanza de esta disciplina. Una alternativa presentada en los estudios nacionales es la construcción de una interfaz entre la enseñanza de la historia y la matemática desarrollada por Saito y Dias (2013). En este artículo se apropió de la escala de números elaborada por Edmund Gunter (1581 – 1626) presentada en el tratado The description and vse of the Sector, the Crosse-staffe, and other instruments, for such as arestudios of Mathematicall Practice publicado en 1623 para construir una interfaz. Así, el objetivo fue analizar el conocimiento matemático movilizado en una actividad aplicada con estudiantes de licenciatura en Matemáticas a partir del manejo de la escala de números. Como metodología se utilizó la Teoría de la Objetivación (TO) y para el análisis de los datos se ajustó el análisis semiótico indicado por la TO. Los resultados obtenidos giran en torno a diferentes saberes matemáticos movilizados y articulados entre sí. Se concluye que la movilización de conocimientos como logaritmo, bisectriz y construcción geométrica se dio a partir de la actividad realizada.

Palabras clave: interfaz entre la enseñanza de la historia y la matemática, Teoría de la Objetivación, escala de números.

INTRODUÇÃO

As discussões entorno da Educação Matemática vem ganhando cada vez mais destaque em pesquisas nacionais, um foco que está presente em muitas delas é o uso de recursos didáticos provenientes da história no ensino para a mobilização de saberes matemáticos. Pode-se citar os estudos de Batista e Pereira (2017); Saito (2019); Pereira e Saito (2019a) e Santos, Oliveira e Pereira (2020) que se apropriaram da história e proporam uma interface com o ensino de Matemática.

Nesse viés de investigação, está em voga a construção de uma interface entre história e ensino de Matemática elaborada por Saito e Dias (2013, p. 92) que se configura como um "conjunto de ações e produções que promova a reflexão sobre o processo histórico da construção do conhecimento matemático para elaborar atividades didáticas que busquem articular história e ensino de matemática".

Há diversas possibilidades de opções na história para se construir uma interface nos preceitos de Saito e Dias(2013), pode-se escolher, de acordo com Saito (2015), uma fotografia, uma tratado, um instrumento ou uma pintura como recurso histórico que podem ser potencialmente didáticos para o ensino de Matemática. Se a escolha do recurso potencialmente didático for um texto original, é importante seguir alguns critérios de seleção do tratado matemático a ser utilizado.

Silva e Pereira (2021) estabeleceram critérios para o escolha do tratado matemático, são eles: qual material será usado; como será utilizado; qual objetivo ao se escolher tal texto; nível escolar a ser aplicado; se é necessário a realização de um tratamento didático do tratado; quando utilizar o tratado e qual perspectiva historiográfica utilizar.

Diante desses critérios, para a construção de uma interface, foi escolhido o tratado *The description and vse of the Sector, the Crosse-staffe, and other instruments, for such as are studious of Mathematicall practise* elaborado por Edmund Gunterem 1623, especificamente a parte que trata sobre a escala dos números (*Line of numbers*). Assim, foi feito um tratamento didático do excerto escolhido e optou-se por uma abordagem historiográfica atualizada que "[...] visa contextualizar o conhecimento antigo no próprio passado, sem levar em consideração descobertas posteriores a ele" (SILVA; PEREIRA, 2021, p. 225).

Na construção de interface é preciso elaborar uma atividade com o recurso advindo da história, entretanto a perspectiva de interface elaborada por Saito e Dias (2013) não conta com uma metodologia para isso. Desse modo, neste artigo foi-se apropriada a utilização da Teoria da Objetivação (TO) para pautar o desenvolvimento da atividade com a escala dos números e a aplicação na formação inicial de professores.

Diante da proposta de construção de interface com a utilização da escala dos números e subsídio teórico-metodológico da Teoria da Objetivação, objetiva-se analisar os saberes matemáticos mobilizados em uma atividade aplicada com licenciandos em Matemática a partir do manuseio da escala dos números.

Dessa maneira, o artigo está dividido em quatro partes. Na primeira, apresenta-se os preceitos teóricos-metodológicos da pesquisa. Na segunda, destaca-se as particularidades da atividade que foi elaborada de acordo com os preceitos da TO. Na terceira parte, discorre-se acerca da manipulação da escala dos números para encontrar uma média proporcional dados dois números. Por fim, no quarto tópico do estudo, são expostos os dados coletados na formação com licenciandos em Matemática e a análise desses dados.

APORTES TEÓRICOS-METODOLÓGICOS

Em relação à teoria adotada nesse artigo, Radford (2018a, p. 229-230) esclarece que

> A Teoria da Objetivação (TO) é uma teoria educacional que se concentra nos problemas do ensino e da aprendizagem e para isso se baseia na filosofia de Hegel (1830[1991]) e no subsequente materialismo dialético desenvolvido por filósofos como Marx (1932[1998]) e Ilyenkov (1977). O suporte filosófico dialético da teoria da objetivação significa, entre outras coisas, que a TO está inserida em uma linha de pensamento em que os seres humanos não podem ser concebidos como apartados do mundo e de suas culturas.

Desse modo, a TO se caracteriza como uma teoria educacional sociocultural moderna que se baseia na ideia de que a aprendizagem é um processo de conhecer e se tornar dos indivíduos envolvidos na atividade, inclusive o professor (RADFORD, 2017). Assim, essa teoria, além de dispor de construtos para elaboração de atividades, também direciona a postura do professor frente a realização da atividade. É nela que

> [...] os indivíduos ativam e põem em movimento o saber, tornando concretas certas formas de ação e reflexão. Quando ativado, o saber se transforma. Ao transforma-se, abandona a sua forma imperceptível e se *mostra*, se *materializa* em algo perceptível, sensível, concreto. Essa *materialização* é identificada na TO sob o termo *conhecimento* (MOREY, 2020, p. 56-57).

Considerando a atividade como um momento em que o saber entra em movimento, tem-se o elemento principal da TO, o labor conjunto, que se enende como a cooperação entre professor e alunos, com papéis diferentes, em que o professor deve se atentar à seleção de problemas da atividade e da organização dos assuntos a serem abordados. Nesse aspecto, a aprendizagem está voltada para perceber e dar significado ao saber (potencial), de maneira ativa e criativa, por meio de ações e reflexões (RADFORD, 2015, 2021; PAIVA, 2019).

Em relação à construção da atividade, a TO prega que ela seja estruturada de forma que conste um objeto, objetivo e que os problemas das tarefas sejam dispostos em uma ordem crecente de dificuldade respeitando o saber que o aluno já tem constituído. Assim, na elaboração das tarefas da atividade, é necessário levar em conta três elementos, consideração gerais, relativas e sobre a forma de colaboração, em que:

> (1) As considerações gerais incluem:
> a. levando em conta o que os estudantes já sabem; e
> b. envolvendo, na medida do possível, o uso de artefatos (concretos, tecnológicos, etc.).
> (2) As considerações relativas aos problemas matemáticos indicam que eles devem:
> c. ser interessantes do ponto de vista dos alunos;
> d. oferecer aos alunos oportunidades de se envolverem com saberes matemáticos em níveis profundos de conceituação;
> e. ser organizados de acordo com uma unidade conceitual e contextual; e
> f. ter uma complexidade conceitual crescente.
> (3) As considerações sobre as formas especificas de colaboração humana incluem a organização da sala de aula de uma forma que venha:

> g. incentivar reflexões críticas; e
> h. propiciar uma forte interação entre os alunos, e entre o professor e os alunos (RADFORD, 2021, p. 133, tradução nossa)[3].

Além das tarefas contarem com esses três elementos, é preciso que elas também obedeçam a três níveis de conceitualização:

> – O primeiro nível é associado a uma experiência sensorial concreta, isto é, a uma experimentação e reflexão através do uso de materiais concretos [...].
> – O segundo nível de conceitualização envolve uma reflexão teórica baseada no uso de objetos concretos que poderiam realçar possíveis ligações emergentes que dão significado aos objetos matemáticos.
> – O terceiro nível de conceitualização aparece com a manipulação de símbolos matemáticos com os quais os estudantes elevam a experiência anterior (experiência sensorial, concreta) para outro nível de consciência (RADFORD, 2021, p. 133-134, tradução nossa)[4].

Seguindo os preceitos que regem a construção da atividade, o próximo passo é sua aplicação. Nesse momento entra em vigor o labor conjunto citado anteriormente. Para análise dos dados coletado, utiliza-se o método de análise semiótica sob o olhar da TO, indicado por Radford (2021), uma vez que esse método de análise é usado em diversos estudos que envolvem Teoria da Objetivação e é indicação da teoria uma vez que se apoia no alicerne vygotskyano. Para esse artigo, analisou-se o problema um da tarefa cinco da atividade desenvolvida com base na TO tendo como recurso didático a escala dos números.

A ATIVIDADE EM VISTAS À TEORIA DA OBJETIVAÇÃO

Para este artigo foi considerada uma formação realizada no ano de 2021 com oito licenciandos em Matemática da Universidade Estadual do Ceará (UECE). Esse oito licenciandos foram separados em duas grupos, cada um com quatro integrantes. Para a análise dos dados foi selecionado um grupo para a discussão dos saberes matemáticos mobilizados a partir de uma atividade com a escala dos números, atividade elaborada a partir dos preceitos da Teoria da Objetivação[5].

Destaca-se que essa fomação foi submetido a análise no comitê de ética e foi aprovada para a implementação na formação de professores[6]. Por conta da pandemia da Covid-19, a formação ocorreu na modalidade remota por meio do *Zoom Meetings*, em que foram criadas duas salas para a divisão dos grupos, cada um com quatro discentes de semestre variados.

A formação iniciou no dia 25 de março de 2021 e se estendeu até o dia 29 de julho de 2021, contou com dois encontros semanais de 2h/a contabilizando um total de 40h/a. Nesse período, foi

---

[3] Lê-se em inglês: "1. General considerations include:
a. taking into account what the students already know; and
b. involving, as far as possible, the use of (concrete, technological, etc.) artefacts.
2. Considerations concerning the mathematical problems include problems that:
c. are interesting from the students' point of view;
d. offer the students opportunities to engage with mathematical knowledge at deep levels of conceptualisation;
e. are organised according to a conceptual and contextual unity (more on this below); and
f. have an increasing conceptual complexity (more on this below).
3. Considerations about the targeted forms of human collaboration include the organisation of the classroom in ways that:
g. encourage critical reflections; and
h. propitiate a strong interaction between the students, and between the teacher and the students" (RADFORD, 2021, p. 133).

[4] Lê-se no original: "– A first level is associated with a concrete sensual experience; that is, with an experimentation and reflection through the use of concrete materials […].
– A second level of conceptualisation involves a theoretical reflection based on the use of concrete objects that could open up possible emerging links to the meaning of mathematical objects.
– A third level of conceptualisation appears with the manipulation of mathematical symbols with which the students raise the previous experience (e.g., concrete, sensual experience) to another level of consciousness" (RADFORD, 2021, p. 133-134).

[5] Recorte da pesquisa de mestrado de Santos (2022).

[6] Aprovação do comitê de ética com número de parecer 4.391.528 e CAAE: 39612320.5.0000.5589.

explorada uma atividade de sete tarefas construída com base na Teoria da Objetivação. Observa-se no Quadro 1 o programa da formação em relação a atividade elaborada.

Quadro 1 – Programa da formação

CONTEÚDOS	CH
UNIDADE 1: Ambientação no século XVII em Londres 1.1. O contexto de elaboração do tratado *The Description and use of the Sector. The Crosse-staffe and other instruments*...; 1.2. A matemática percebida no frontispício do documento.	4h/a
UNIDADE 2: O instrumento *Cross-staff* e a escala dos números 2.1. O instrumento *Cross-staff* desenvolvido por Edmund Gunter; 2.2. Estudo inicial sobre a escala dos números; 2.3. Os conhecimentos incorporados na escala dos números.	4h/a
UNIDADE 3: O uso da proporção contínua 3.1. Estudo inicial sobre a proporção contínua; 3.2. Saberes matemáticos mobilizados no uso da proporção contínua a partir da manipulação da escala dos números.	8h/a
UNIDADE 4: Aplicação da proporção contínua 4.1. Aplicação da proporção contínua em um problema prático; 4.2. Delineamento dos saberes matemáticos mobilizados na realização dos problemas de ordem prática.	4h/a
UNIDADE 5: O uso da média proporcional 5.1. Estudo inicial sobre a média proporcional; 5.2. Saberes matemáticos mobilizados para obter a média proporcional a partir da manipulação da escala dos números	6h/a
UNIDADE 6: Aplicação da média proporcional 6.1. Aplicação da média proporcional em um problema prático; 6.2. Delineamento dos saberes matemáticos mobilizados na realização dos problemas de ordem prática.	10h/a
UNIDADE 7: Formalização das ideias matemáticas 7.1 Sistematização dos saberes mobilizados ao manipular a escala dos números no uso da proporção contínua; 7.2 Sistematização dos saberes mobilizados ao manipular a escala dos números no uso da média proporcional.	4h/a

Fonte: Santos (2022).

A atividade desenvolvida para a pesquisa teve sete tarefas e estavam entrelaçadas com um recurso didático advindo da história, especificamente foi utilizada a escala dos números desenvolvida por Edmund Gunter (1581 – 1626). Desse modo, as tarefas têm intencionalidades e objetivos diferentes que visam o objeto da atividade e seu objetivo geral.

Assim, a atividade que foi elaborada teve como objeto o desenvolvimento de ideias sobre média geométrica e objetivou mobilizar saberes matemáticos incorporados na escala dos números a partir da sua manipulação para proporção contínua e de média proporcional.

De acordo com a Teoria da Objetivação os problemas da atividade devem ter uma dificuldade conceitual crescente e que se entrelacem no decorrer da atividade. Desse modo, as tarefas desenvolvidas partiram de uma ambientação histórica no contexto histórico que a escala dos números foi desenvolvida, adentra ao instrumento propriamente dito e os saberes incorporados nele e culmina em duas manipulação dessa escala, para enconrar um terço, um quarto, um quinto etc. em proporção contínua dados dois números e para obter a média proporcional de dois números. Assim, observa-se o Quadro 2 com os temas abordados em cada tarefa dessa atividade.

Quadro 2 – Temas entorno das tarefas

Tarefas	Tema
Tarefa 1	Familiarização sobre o cenário de elaboração do tratado de Gunter (1623)
Tarefa 2	Estudo inicial do instrumento *Cross-staff* e da escala dos números
Tarefa 3	Entendimento sobre como obter um terço, um quarto, um quinto, etc. em proporção contínua dados dois números com a escala dos números
Tarefa 4	Aplicação do uso da escala dos números em relação à proporção contínua em um contexto prático
Tarefa 5	Entendimento sobre a manipulação da escala dos números para encontrar a média proporcional dados dois números
Tarefa 6	Aplicação do uso da escala dos números referente à média proporcional em uma situação prática
Tarefa 7	Formalização das ideias matemáticas mobilizadas na atividade

Fonte: Elaborado pelas autoras.

Para esse artigo foi feito em recorte da atividade, escolheu-se explorar o primeiro problema da tarefa cinco, que tinha como material necessário a escala dos números, um compasso e o cartão de recurso cinco com a explicação de Gunter (1623) sobre a manipualação da escala para encontrar a média proporcional dados dois números. O problema um consistia em etender o manuseio da escala dos números para obter a média proporcional de dois números a partir da leitura do cartão de recurso cinco.

Especificamente, a tarefa cinco traz uma unidade conceitual e contextual, conceito que refere-se ao pano de fundo em que os problemas serão postos (RADFORD, 2021), de acordo com os preceitos da TO e o problema a ser abordado neste artigo. Tem-se, desse modo, como unidade conceitual e contextual o seguinte cenário: Depois de vocês compreenderem a manipulação da escala dos números para utilização da proporção contínua e realizar a primeira missão sobre o levantamento da produção de instrumentos em Londres, o artesão, Elias Allen, solicitou que o grupo se apropriasse agora da manipulação da escala dos números para obter a média proporcional. A partir da leitura do cartão de recurso cinco:

1) Procurem entender o manuseio da escala dos números para obter a média proporcional.

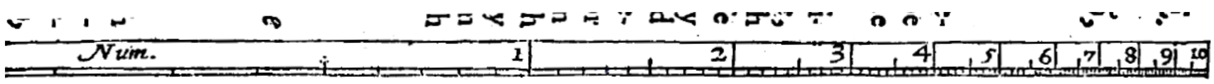
Dessa maneira, o próximo tópico aborda a maneira na qual é realizada a manipualação da escala dos números para encontrar a média proporcional de dois números com base no excerto do tratado *The description and vse of the Sector, the Crosse-staffe, and other instruments, for such as are studious of Mathematicall practise* de Edmund Gunter.

A ESCALA DOS NÚMEROS E SUA MANIPULAÇÃO PARA ENCONTRAR A MÉDIA PROPORCIONAL DADOS DOIS NÚMEROS

A escala dos números (Figura 1), chamada por Gunter (1623) de *line of numbers*, foi desenvolvida enquanto Edmund Gunter (1581 – 1626) era professor do Gresham College, onde ele "[...] deve ter recebido muitos comentários práticos de capitães de navios e outros navegadores [...]" em suas palestras (VAN POELJE, 2004, p. 13, tradução nossa). Essa influência de praticantes de matemática tem vestígios no desenvolvimento de escalas para serem utilizadas na prática da navegação, inclusive na elaboração da escala dos números, visto que ela também era voltada para a navegação, juntamente com as demais escalas das proporções[7].

Figura 1 – Escala dos números

[7] Sobre as escalas das proporções vide Santos e Pereira (2021).



Fonte: Gunter (1623, p. 31).

A escala dos números é utilizada para vários fins, perpassando por cálculos aritméticos, astronômicos e também pode ser combinada com outras escalas das proporções para outras finalidades. Gunter (1623) apresenta no tratado *The description and vse of the Sector, the Crosse-staffe, and other instruments, for such as are studious of Mathematicall practise*, em particular, no capítulo seis sobre o instrumento *Cross-staff*, os usos gerais para a escala dos números.

Nessa parte do documento, Gunter (1623) mostra dez usos gerais para a escala dos números usando o compasso, sendo eles:

1. tendo dois números dados, para encontrar um terço em proporção contínua, um quarto, um quinto e assim por diante;
2. **tendo dois números extremos dados, para encontrar uma média proporcional entre eles;**
3. para encontrar a raiz quadrada de qualquer número dado;
4. tendo dois números extremos dados, para encontrar dois proporcionais médios entre eles;
5. para encontrar a raiz cúbica de um número fornecido;
6. para multiplicar um número por outro;
7. para dividir um número por outro;
8. três números sendo dados, para encontrar um quarto proporcional;
9. três números sendo dados, para encontrar um quarto em uma proporção duplicada;
10. três números sendo dados, para encontrar um quarto em uma proporção triplicada.

A média proporcional é a segunda manipulação da escala dos números apresentada por Gunter (1623, p. 19, tradução nossa), como visto anteriormente no destaque, em que ele enuncia: "Tendo dois números extremos dados, para encontrar uma média proporcional entre eles". É preciso explícitar quem são os números extremos mencionados pelo autor, esses números são as marcações em que serão dispostas as pontas do compasso.

Após apresentar esse manuseio, Gunter (1623), brevemente, diz como ocorre a manipulação: "divida o espaço entre os números extremos em duas partes iguais, e o pé do compasso permanecerá na proporcional média" (GUNTER, 1623, p. 19, tradução nossa). Desse modo, o compasso registra a distância entre os dois números dados e, achando a metade dessa distância, verifica-se, na escala, a média proporcional desses números.

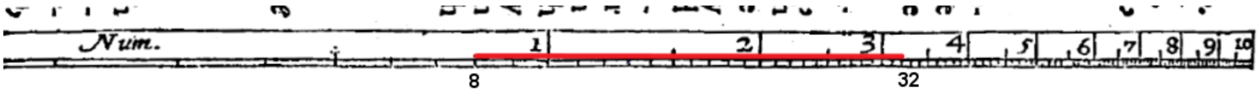
O autor indica que é necessário dividir o espaço coletado pelo compasso em duas partes iguais, porém não traz nenhuma explanação sobre como realizar esse procedimento. Com a realização de uma pesquisa sobre o contexto em que essa escala foi desenvolvida, no século XVII, Os Elementos, de Euclides, já havia sido traduzido para o latim e o inglês, desse modo, há grandes chances de Gunter ter conhecimentos aprofundados sobre esse estudo, uma vez que cita a proposição seis no primeiro livro sobre o instrumento Setor. Por isso, o procedimento de dividir um determinado espaço em duas partes iguais pode ser retirado desse estudo sobre geometria.

Gunter (1623) traz, posteriormente, um exemplo de como encontrar uma média proporcional tendo dois números dados, ele expõem: "portanto, os números extremos dados como 8 e 32, a média entre eles será 16, o que pode ser comprovado pela antiga proposição, onde foi mostrado, que como 8 a 16, também são 16 a 32" (GUNTER, 1623, p. 19, tradução nossa).

Na passagem supracitada, o autor faz referência a manipulação explicitada anteriormente em seu tratado. Ao se referir à antiga proposição, Gunter (1623) retoma a proporção contínua, ou seja, é possível encontrar uma sequência de números proporcionais entre si.

Dessa forma, considerando as informações dadas por Gunter (1623), considerou-se como exemplo, 8 e 32, é preciso, então, estender os pés com compasso do número 8 até o número 32 marcados na escala dos números, obtendo-se a distância no compasso correspondente ao segmento em vermelho, na Figura 2.

Figura 2 – Distância entre os números 8 e 32



Fonte: Adaptado de Gunter (1623, p. 31).

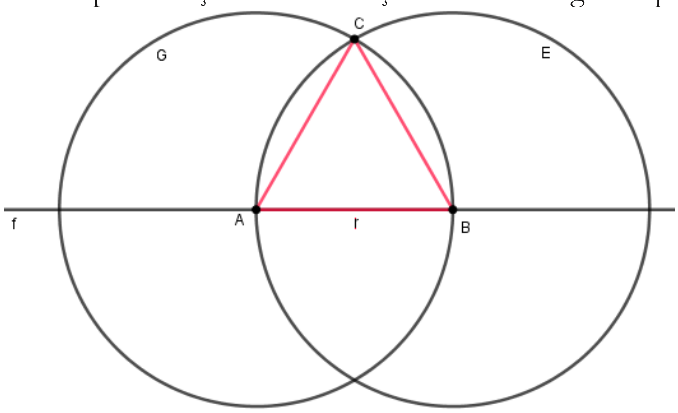
Com a distância netre 8 e 32 registrada com o compasso, é necessário dividir esse espaço em duas partes iguais. Como dito anteriormente, o autor tinha conhecimento sobre as construções expostas no estudo de Euclides, logo, presume-se que ele sabia dividir um determinado espaço em duas partes iguais, em particular, considerando as proposições I.1, I.9 e I.10 dos Elementos.

Assim, dada a proposição I.1 sobre construir um triângulo equilátero sobre uma reta limitada dada $\overline{AB}$, sendo ela a distância registrada pelo compasso ao posicionar suas pontas na marcação 8 e 32 na escala, tem-se

> Seja a reta limitada dada AB. É preciso, então, sobre a reta AB construir um triângulo equilátero. Fique descrito, por um lado, com o centro A, e, por outro lado, com a distância AB, o círculo BCD, e, de novo, fique descrito, por um lado, com o centro B, e, por outro lado, com a distância BA, o círculo ACE, e, a partir do ponto C, no qual os círculos se cortam, até os pontos A, B, fiquem ligadas as retas CA, CB.
> E, como o ponto A é centro do círculo CDB, a AC é igual à AB; de novo, como o ponto B é centro do círculo CAE, a BC é igual à BA. Mas a CA foi também provada igual à AB; portanto, cada uma das CA, CB é igual à AB. Mas as coisas iguais à mesma coisa são também iguais entre si; portanto, também a CA é igual à CB, portanto, as três CA, AB, BC são iguais entre si.
> Portanto, o triângulo ABC é equilátero, e foi construído sobre a reta limitada dada AB.
> [Portanto, sobre a reta limitada dada, foi construído um triângulo equilátero]; o que era preciso fazer (EUCLIDES, 2009, p. 99).

Observa-se na Figura 3 a representação da construção do triângulo equilátero representado na cor vermelha e a distância entre 8 e 32 representada por $\overline{AB}$.

Figura 3 – Representação da construção de um triângulo equilátero



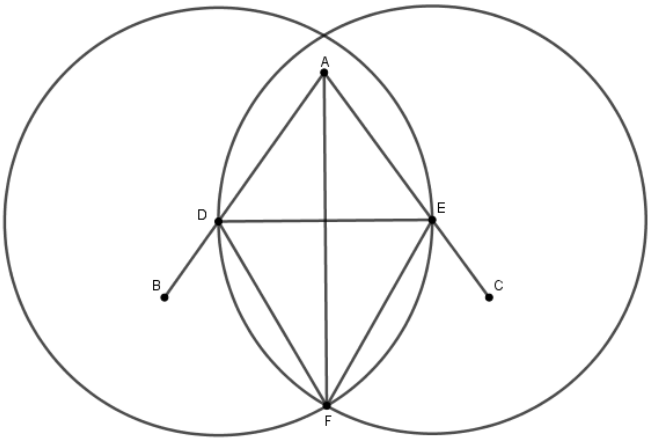
Fonte: Elaborada pelas autoras.

Feita a construção do triângulo equilátero, considera-se a proposição I.9 para cortar em dois um ângulo retilíneo[8] dado, tem-se:

> Seja o ângulo retilíneo dado o sob BAC; é preciso, então, cortá-lo em dois.
> Fique tomado sobre AB o ponto D, encontrado ao acaso, e fique subtraída da AC a AE igual à AD, e fique ligada a DE, e fique construído sobre a DE o triângulo equilátero DEF, e fique ligada a AF; digo que o ângulo sob BAC foi cortado em dois pela reta AF.
> Pois, como a AD é igual à AE, e a AF é comum, então, as duas DA, AF são iguais às duas EA, AF, cada uma a cada uma. Também a base DF é igual à base EF; portanto, o ângulo sob DAF é igual ao ângulo sob EAF.
> Portanto, o ângulo retilíneo dado, o sob BAC, foi cortado em dois pela reta AF; o que era preciso fazer (EUCLIDES, 2009, p. 105).

Tem-se na Figura 4 a reconstrução geométrica da proposição I.9.

Figura 4 – Representação da construção para divisão de um ângulo em duas partes iguais



Fonte: Elaborada pelas autoras.

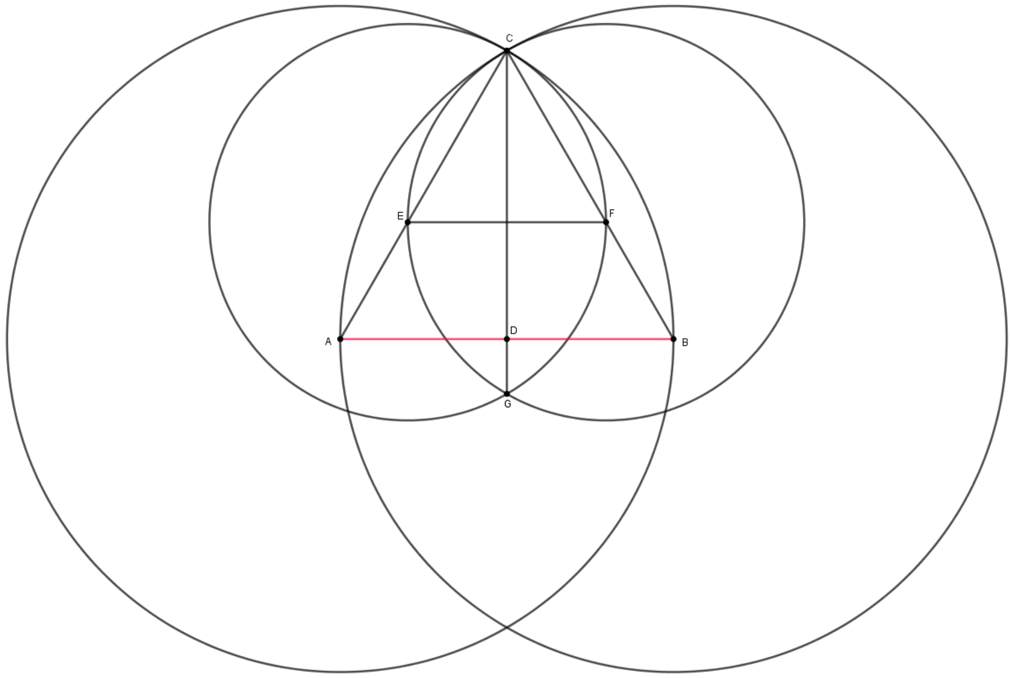
Com o procedimento de dividir um ângulo retilíneo em duas partes, decorre a proposição I.10, para se dividir um segmento em duas partes iguais, segue-se:

> Seja a reta limitada dada AB; é preciso, então, cortar a reta limitada AB em duas.
> Fique construído sobre ela o triângulo equilátero ABC, e fique cortado o ângulo sob ACB em dois pela reta CD; digo que a reta AB foi cortada em duas no ponto D.
> Pois, como a AC é igual à CB, e a CD é comum, então, as duas AC, CD são iguais às duas BC, CD, cada uma a cada uma; e o ângulo sob ACD é igual ao ângulo sob BCD; portanto, a base AD é igual à base BD.
> Portanto, a reta limitada dada AB foi cortada em duas no D; o que era preciso fazer (EUCLIDES, 2009, p. 106).

Percebe-se que para compreender a proposição I.10 em seus enlaces de construção é preciso saber das proposições I.1 e I.9. Na Figura 5 apresenta-se a representação da proposição I.10 geometricamente, em vermelho encontrase o segmento $\overline{AB}$ referente a distância de 8 e 32, o ponto D marca o ponto médio desse segmento de reta.

Figura 5 – Representação da divisão de um segmento em duas partes iguais

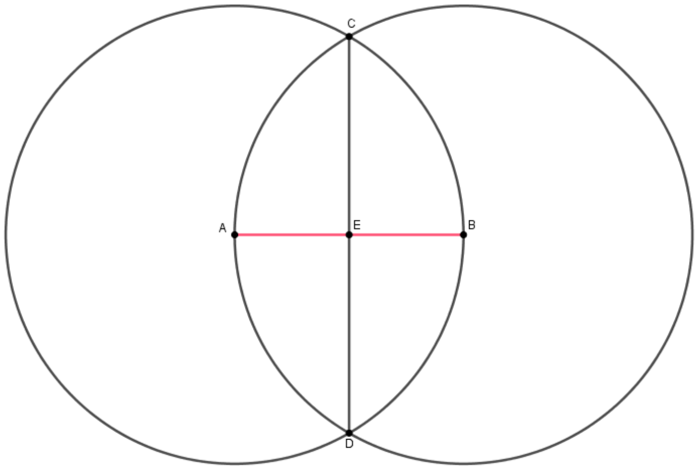
[8] Por ângulo retilíneo, define-se "[...] quando as linhas que contêm o ângulo sejam retas, o ângulo é chamado retilíneo" (EUCLIDES, 2009, p. 97).



Fonte: Elaborada pelas autoras.

Salienta-se que os procedimentos de construção geométrica expostos anteriormente podem ser realizados contando somente com o auxílio de compasso e régua não graduada. Sabendo como dividir um dado segmento de reta em duas partes iguais, pode-se ocultar algumas passagens na nessa construção como exposto na figura 6 em que se omitiram construções que não são relevantes para o objetivo de encontrar o ponto médio de um segmento.

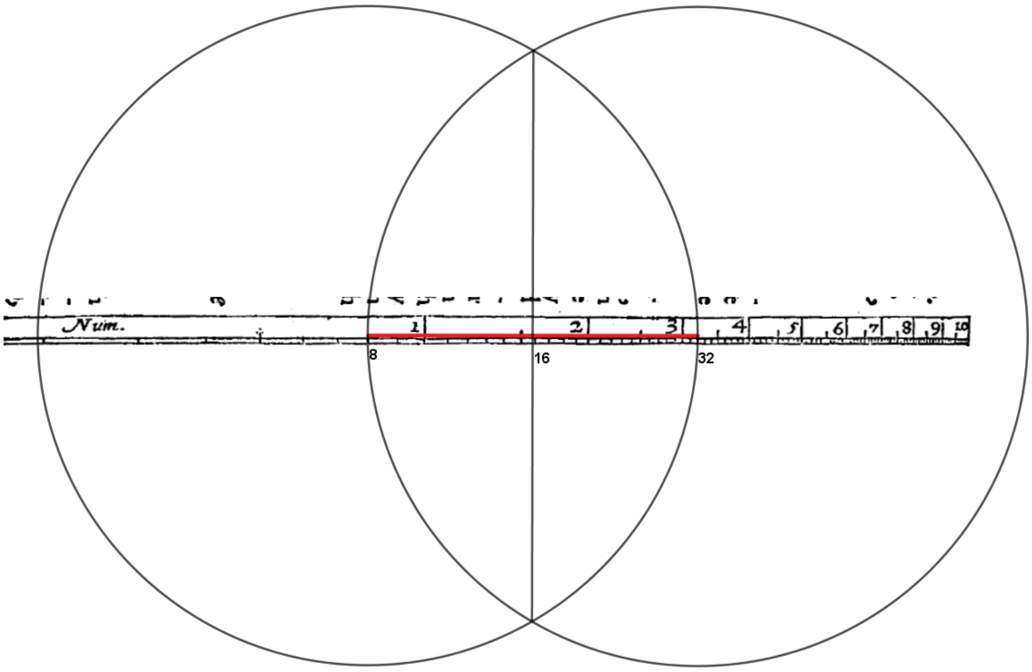
Figura 6 – Construção simplificada



Fonte: Elaborada pelas autoras.

Desse modo, seguindo os passos simplificados, é possível dividir o segmento encontrado, concebendo a distância entre 8 e 32 na escala dos números em duas partes iguais. Considera-se a uma extremidade onde o compasso toca o número 8 na escala; a outra extremidade é o ponto correspondente ao 32 da escala dos números como apresentado na Figura 7 tem-se como resultado 16 como média proporcional.

Figura 7 – Média proporcional de 8 e 32



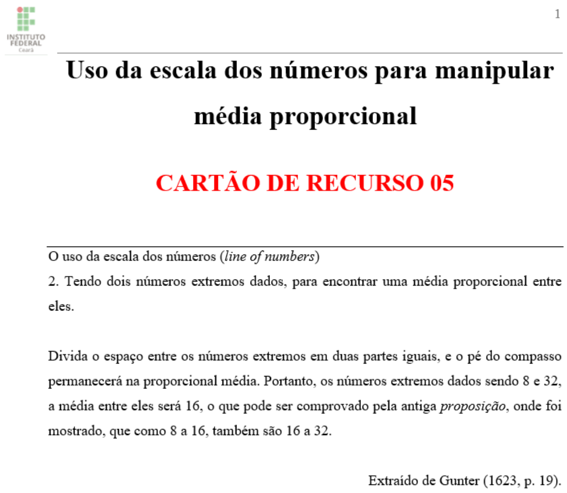
Fonte: Elaborada pelas autoras.

Desse modo, foi exposto como encontrar uma média proporcional seguindo as instruções expressas por Gunter (1623). A partir disso foi proposta a tarefa cinco, particularmente, o problema um para o entendimento de como encontrar a média proporcional de dois números dados, o que é apresentado no tópico a seguir.

DISCUSSÕES ACERCA DOS ENLACES MATEMÁTICOS MOBILIZADOS NA FORMAÇÃO COM LICENCIANDOS EM MATEMÁTICA

O cartão de recurso 5 da atividade proposta com licenciandos do curso de Matemática traz o excerto do tratado de Gunter (1623) sobre a manipulação da escala dos números para encontrar uma média proporcional dados dois números como consta na Figura 8 a imagem do cartão de recurso 5.

Figura 8 – Cartão de recurso 5



INSTITUTO FEDERAL Ceará

1

Uso da escala dos números para manipular média proporcional

CARTÃO DE RECURSO 05

O uso da escala dos números (*line of numbers*)

2. Tendo dois números extremos dados, para encontrar uma média proporcional entre eles.

Divida o espaço entre os números extremos em duas partes iguais, e o pé do compasso permanecerá na proporcional média. Portanto, os números extremos dados sendo 8 e 32, a média entre eles será 16, o que pode ser comprovado pela antiga *proposição*, onde foi mostrado, que como 8 a 16, também são 16 a 32.

Extraído de Gunter (1623, p. 19).

Fonte: Elaborada pelas autoras.

Após a leitura do cartão de recurso 5, o grupo escolhido para a análise iniciou a leitura do primeiro problema dessa tarefa, a saber: procurem entender o manuseio da escala dos números para obter a média proporcional. Assim, foi proposto que os licenciandos manipulassem a escala dos números juntamente com um compasso seguindo as indicações que Gunter (1623) fornece para encontrar a média proporcional de dois números, disposto no cartão de recurso 5. Nesse segmento da atividade, os discentes discutiram, manipularam a escala e tentaram compreender como se realiza esse manuseio.

Para começar a manipular a escala para esse fim, os alunos consideraram o exemplo trazido por Gunter (1623, p. 19, tradução nossa), exposto no excerto: "[...] os números extremos dados sendo 8 e 32, a média entre eles será 16 [...]". Os discentes, através dessa passagem, manipularam a escala para encontrar o número 16, média proporcional de 8 e 32. Esse é o primeiro contato que os discentes têm com a escala dos números para essa finalidade.

Os licenciandos perceberam que Gunter (1623) não explica como realizar a divisão do segmento de reta correspondente à distância entre os números 8 e 32 na escala. Logo, os discentes precisavam mobilizar saberes acerca de divisão de um segmento de reta em duas partes iguais, ou seja, um aspecto referente à mediatriz ou ponto médio de um segmento, algo que se configura como uma potencialidade usando essa escala, algo que será ressaltado posteriormente.

É importante, nesse momento da análise, destacar a fala do Aluno B ao iniciar o processo de manipulação (Quadro 1).

Quadro 1 – Registrando a distância entre os números dados

Interlocutor	Discurso	Contexto
Aluno B	Ele dá 8 e 32, temos que pegar no começo da escala porque não tem 32 depois.	Seguindo as instruções de Gunter (1623), o grupo tenta manipular a escala para encontrar a distância que precisa ser dividida em duas partes iguais.

Fonte: Elaborado pelas autoras.

O primeiro passo para fazer essa manipulação, segundo o Aluno B (2021), é "[...] pegar no começo da escala [a marcação do número 8] porque não tem 32 depois". Ele se refere a encontrar o 8 no começo da escala, haja vista que, na outra extremidade do compasso, no caso o 32, cai fora dela se considerarmos o 8 que está enumerado na escala. Portanto, encontra-se um 8 no começo e multiplica-se toda a escala por 10, tendo, na marcação de 3,2, a marcação equivalente a 32.

Nesse momento da tarefa, ao relatar a importância de se considerar o 8 no começo da escala, os alunos estão no processo de objetivação – com base nos preceitos da TO – para a compreensão mais aprofundada dos conhecimentos matemáticos que estão incorporados nela, especificamente, o conceito de logaritmo. Há também outro processo que já está bem estabelecido no grupo, que é a multiplicação dos números da escala da escala dos números por 10, 100, 1000, etc. de acordo com a necessidade do problema e dos cálculos propostos. Nessa breve fala do Aluno B já se percebem dois saberes matemáticos, o de logaritmo incorporado na escala ao notarem que a marcação no começo da escala para representar o 8 e a mesma que está enumerada posteriormente nela e a multiplicação por 10, 100, 1000 etc. para efetuar todos os tipos de cálculos.

Desse modo, sabendo onde posicionar o compasso, os discentes utilizaram suas escalas impressas e seus compassos para seguir as instruções de Gunter (1623) e obter a média proporcional de 8 e 32. Entretando, é constatado, pelos alunos, que o autor não revela como dividir a distância registrada entre os números dados em duas partes iguais, o que proporcionou discussões acerca de um procedimento para dividir um segmento pela metade, fato evidenciado na transcrição do momento no Quadro 2.

Quadro 2 – Discussões sobre como dividir um segmento em duas partes iguais

Nº	Interlocutor	Discurso	Contexto
1	Aluno B	Tem uma coisa que dá certo, é com o compasso, mas eu acho que não faz muito sentido, não sei se eles usaram isso. Dá para dividir no meio assim, usando a **mediatriz**. (*Tom de voz que expressa dúvida*)	

2		Se você fizer o círculo lá como é com a ponta seca no 8 e a com grafite no 32 e depois fizer ao contrário o círculo com a ponta seca no 32 e a ponta com grafite no 8 vão dar dois círculos diferentes né? (*expressa incerteza*) Que vão se interceptar em dois pontos. Traçando a reta entre esses dois pontos ela passa exatamente no 16 que é a mediatriz. (*O aluno olha para baixo, pois enquanto fala está manipulando a escala*)	
3	Aluna C	O número 32 que você está falando é o número pequeno na escala?	
4	Aluno B	Sim, sim. **A segunda marcação depois do 3**. [o aluno aplicou a multiplicação por 10]	
5	Pesquisadora	Tentem mobilizar esse procedimento.	
6	Aluno B	É difícil fazer com 8 e 32 porque o círculo passa da folha.	
7		Falem aí dois números que o **produto deles dá uma raiz inteira** [...]	
8	Aluna A	**Faz com números pequenos, 4 e 9, não?**	
9	Aluno B	Mas 4 e 9 dá quanto?	
10	Aluno A	36	Escolhidos os números 4 e 9, eles manipulam a escala com o compasso, seguindo o procedimento explicitado na linha 2.

Fonte: Elaborado pela autora (2021).

No diálogo apresentado no Quaro 2, os licenciandos mobilizaram, pelo menos, cerca de três saberes matemáticos destados no drado, o primeiro se referir a mediatriz, sabendo que a mediatriz de um segmento de reta divide-o em duas partes iguais, outro é de implicitamente considerar a marcação 3,2 como sendo 32 na escala por conta da multiplicação por 10 e, por último, saber que no processo de encontrar uma média proporcional de dois números há uma radiciação envolvida.

Diante da dúvida de como realizar o procedimento de divisão do segmento encontrado ao posicionar o compasso na marcação 8 e 32, o Aluno B (2021) sugere, em tom de dúvida, que "Dá para dividir no meio assim, usando a **mediatriz**", como explicitado na linha 1 do Quadro 2. Os demais discentes do grupo concordam com ele e o ajudam a relembrar como fazer essa construção geométrica. Essa associação de saberes auxilia os licenciandos a compreenderem a manipulação. Nesse momento da tarefa, há o enlace de saberes geométricos, da mediatriz, com aritméticos, dos números da escala em relação à média proporcional, uma vez que a divisão do segmento de reta em duas partes iguais vai resultar em um número na escala correspondente à media poroporcional de 8 e 32.

Na linha 2 do Quadro 2, o Aluno B (2021) explica como fazer a divisão do segmento de reta para os demais licenciandos do grupo:

> Se você fizer o círculo lá como é com a ponta seca no 8 e a com grafite no 32 e depois fizer ao contrário o círculo com a ponta seca no 32 e a ponta com grafite no 8 vão dar dois círculos diferentes né? Que vão se interceptar em dois pontos. Traçando a reta entre esses dois pontos ela passa exatamente no 16 que é a mediatriz.

Nessa explicação, o Aluno B fez uso das proposições mencionados no tópico anterior, contudo de forma objetiva e simplificada para encontrar a mediatriz do registro do compasso da distância entre 8 e 32. Nesse momento os discentes ainda não manipularam a escala. Ao tentarem fazer isso o Aluno B se atentou que os círculos ficariam com raios grandes e que não caberiam nas folhas A4 que ees dispunham. Com isso, o Aluno B (2021) diz: "Falem aí dois números que o **produto deles dá uma raiz inteira** [...]".

Ao se referir ao produto de dois números com raiz inteira ele já está associando a média proporcional a algum tipo de radiciação, mas esse saber ainda não está explícito e concretizado na manipulação, mas já há indícios disso.

Dito isso, a Aluna A (2021) sugere: "**Faz com números pequenos, 4 e 9, não?**". Ao propor isso, a Aluna A relaciona a distância entre os números 4 e 9 na escala com suas grandezas, expressando outra articulação de saberes matemáticos.

Sendo estabelecidos os números 4 e 9 para a realização da manipulação, o grupo segue as orientações do Aluno B de como dividir a distância entre 4 e 9 em duas partes iguais, mobilizando meios semióticos de fala, de gestos e de movimentos com o compasso e com a escala dos números, partindo da mesma explicação transcrita na linha 2 do Quadro 2. Todos chegam ao mesmo resultado, que a média proporcional de 4 e 9 é igual a 6, número encontrado ao traçar a reta entre as interseções dos círculos de centros em 4 e 9 respectivamente e ao intersectar a escala dos números, não há registro visual desse momento, uma vez que a formação aconteceu na modalidade remota, assim a câmera não registrou os movimentos com a escala. Destarte, eles não transpuseram a distância do compasso em um segmento de reta em outro local para realizar o procedimento, consideraram somente a distância do compasso entre os números 4 e 9 na escala e realizaram o processo.

Ressalta-se que o saber de radiciação surgiu nesse momento da tarefa e dá início ao processo de objetivação da média proporcional, portanto o diálogo exposto no Quadro 2 e a manipulação da escala dos números ilustra um nó semiótico.

O grupo também expressou no relatório do problema um como realizaram a manipulação geometricamente, como se segue.

> Para compreendermos como Gunter calculou a média proporcional usando apenas o compasso e a escala dos números, usamos circunferências interceptadas em dois pontos distintos, partindo disso traçamos uma reta mediatriz que no centro desta reta é interceptado o valor da média proporcional entre esses dois valores.
> Por exemplo, usando os pontos 4 e 9, colocando a ponta seca do compasso no quatro e a ponta com o grafite no nove, traçamos uma circunferência, depois fazendo o inverso, colocando a ponta seca no nove e a ponta com o grafite no quatro, desenhamos outra circunferência, assim, encontramos dois pontos sendo interceptados entre essas duas circunferências, traçando uma reta mediatriz que intercepta esses dois pontos, a mesma intercepta na escala dos números o número 6, que é a média proporcional entre 4 e 9 (GRUPO 1, 2021).

Isso seria o bastante para compreender geometricamente o manuseio da escala para encontrar a média proporcional de dois números. Entretanto, como os discentes estudaram em tarefas anteriores, em particular na tarefa dois, sobre o conhecimente incorporado na escala, os logaritmos, eles se aprofundaram em entender logaritmicamente como essa manipulação funciona.

Sendo uma escala logarítmica, aspecto visto e estudado na tarefa dois da atividade, o grupo decide analisar essa manipulação com base no saber incorporado na escala. Logo, eles mobilizaram seus conceitos acerca dos logaritmos e suas propriedades para encontrar a média proporcional de 8 e 32 (Quadro 3).

Quadro 3 – A média proporcional em relação aos logaritmos

Nº	Interlocutor	Discurso	Representação
1	Aluno B	O exemplo que ele dá é do 8 até o 32, o que ele pede para fazer é dividir essa distância ao meio. [exemplo que consta no cartão de recurso 5]	$8 \to 32$

2		**Para dividir em duas partes iguais, como isso aqui é uma distância, temos que saber que distância é essa, essa distância como é em logaritmo é o log de 32 menos log de 8. A distância é sempre o maior menos o menor.**	$\underbrace{8 \to 32}$ $\log 32 - \log 8$
3		**Só que pela propriedade isso aqui é log de 32 sobre 8.** [referindo-se a propriedade da divisão de logaritmos de mesma base]	$\underbrace{8 \to 32}$ $\log 32 - \log 8 = \log \frac{32}{8}$
4		Que é 32 sobre 8, 4, então é o log de 4.	$\underbrace{8 \to 32}$ $\log 32 - \log 8 = \log \frac{32}{8} = \log 4$
5		Só que ele pede para dividir essa distância em duas partes iguais, então dividir essa distância é a mesma coisa que dividir o log de 4, **porque essa distância é o log de 4**. Em 2 partes iguais.	$\underbrace{8 \to 32}$ $\log 32 - \log 8 = \log \frac{32}{8} = \log 4$ $\frac{\log 4}{2}$
6		E aí o log de 4 dividido por 2 eu fiz lá todo aquele processo para dizer que é a mesma coisa que log 4 na base 100. Por conta daquela propriedade né vai levar... só que log de 4 na base 100 é a mesma coisa que log de 2 na base 10. Que é a mesma coisa que só log de 2 né base não precisa porque é tudo na base 10. **Então, dividir essa distância de 8 a 32 no meio é dividir no log de 2**.	$\underbrace{8 \to 32}$ $\log 32 - \log 8 = \log \frac{32}{8} = \log 4$ $\frac{\log 4}{2} = \log_{100} 4 = \log_{10} 2 = \boxed{\log 2}$

Fonte: Elaborado pelas autoras.

No Quadro 3 são mobilizados saberes matemáticos diferentes ao considerar os logaritmos, base da construção da escala dos números. Nesse momento apresentado pelo Quadro 3, o Aluno B se apropriou de meios semióticos da fala; da ética comunitária entre o grupo, que deixou o Aluno B expor suas ideias sem ser interrompido e da linguagem matemática empregada por ele, o que caracterizou um nível mais elevado de consciência dos saberes matemáticos envolvidos nesse processo.

Percebe-se que os meios semióticos utilizados pelo Aluno B se complementam, já que se torna visual o processo matemático implícito que ocorre na escala nessa manipulação. Assim, o primeiro passo, de acordo com o Aluno B (2021) é encontrar a distância entre os números dados:

> Para dividir em duas partes iguais, como isso aqui é uma distância, temos que saber que distância é essa, essa distância como é em logaritmo é o log de 32 menos log de 8. A distância é sempre o maior menos o menor. Só que pela propriedade isso aqui é log de 32 sobre 8. Que é 32 sobre 8, 4, então é o log de 4.

Evidencia-se nessa fala que o Aluno B já não considera a distância entre 8 e 32 em uma noção geométrica como segmento de reta e sim com um logaritmo, especificamente, a distância entre 8 e 32 na escala corresponde ao logaritmo de 4.

Nota-se que, ao explicar a passagem, ele a representa matematicamente, o que é exposto na coluna de representação do Quadro 3. Primeiramente, considerando os números 8 e 32, após isso, representa a distância entre eles, que é uma subtração dos seus logaritmos, em seguida, baseia-se na propriedade da divisão de logaritmos que "em qualquer base a ($0 < a \neq 1$), o logaritmo do quociente de dois números reais positivos é igual à diferença entre o logaritmo do dividendo e o logaritmo do divisor" (IEZZI; DOLCE; MURAKAMI, 2013, p. 63), assim chega à distância entre 8 e 32 na escala, sendo o log de 4, como observado na Figura 9.

Figura 9 – Distância em logaritmo entre 8 e 32 na escala dos números

$$\underbrace{8 \to 32}$$
$$\text{Log}\,32 - \text{Log}\,8 = \text{Log}\,\frac{32}{8} = \text{Log}\,4$$

Fonte: Dados da pesquisa.

Contudo, como se trata de encontrar a média proporcional entre 8 e 32, é necessário dividir a distância entre esses números, ou seja, o log de 4 em duas partes iguais, em outras palavras, é preciso dividir log de 4 por 2, como mostra a representação matemática do Aluno B na Figura 10.

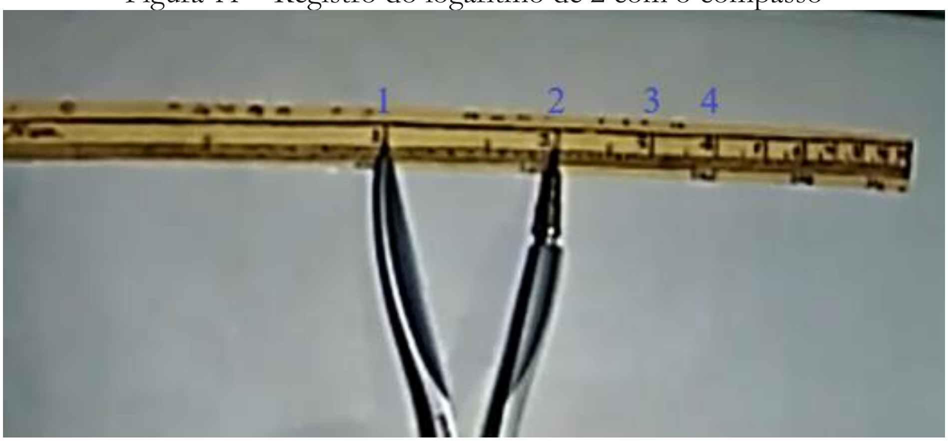
Figura 10 – Dividir o log 4 em duas partes iguais na escala dos números

$$\underbrace{8 \to 32}$$
$$\text{Log}\,32 - \text{Log}\,8 = \text{Log}\,\frac{32}{8} = \text{Log}\,4$$
$$\frac{\text{Log}\,4}{2} = \text{Log}\,{}^{4}_{100} = \text{Log}\,{}^{2}_{10} = \boxed{\text{Log}\,2}$$

Fonte: Dados da pesquisa.

Após o momento transcrito no Quadro 3, o grupo ainda justifica essas ideias logarítmicas utilizando a escala, considerando a média proporcional de 8 e 32. O Aluno B (2021) relata: "nós descobrimos pelos cálculos que a metade dessa distância [entre 8 e 32] é justamente o log de 2", então, o Aluno B apresenta no compasso essa distância e mostra na câmera para registro e para apresentar aos outros discentes do grupo, como mostra a Figura 11.

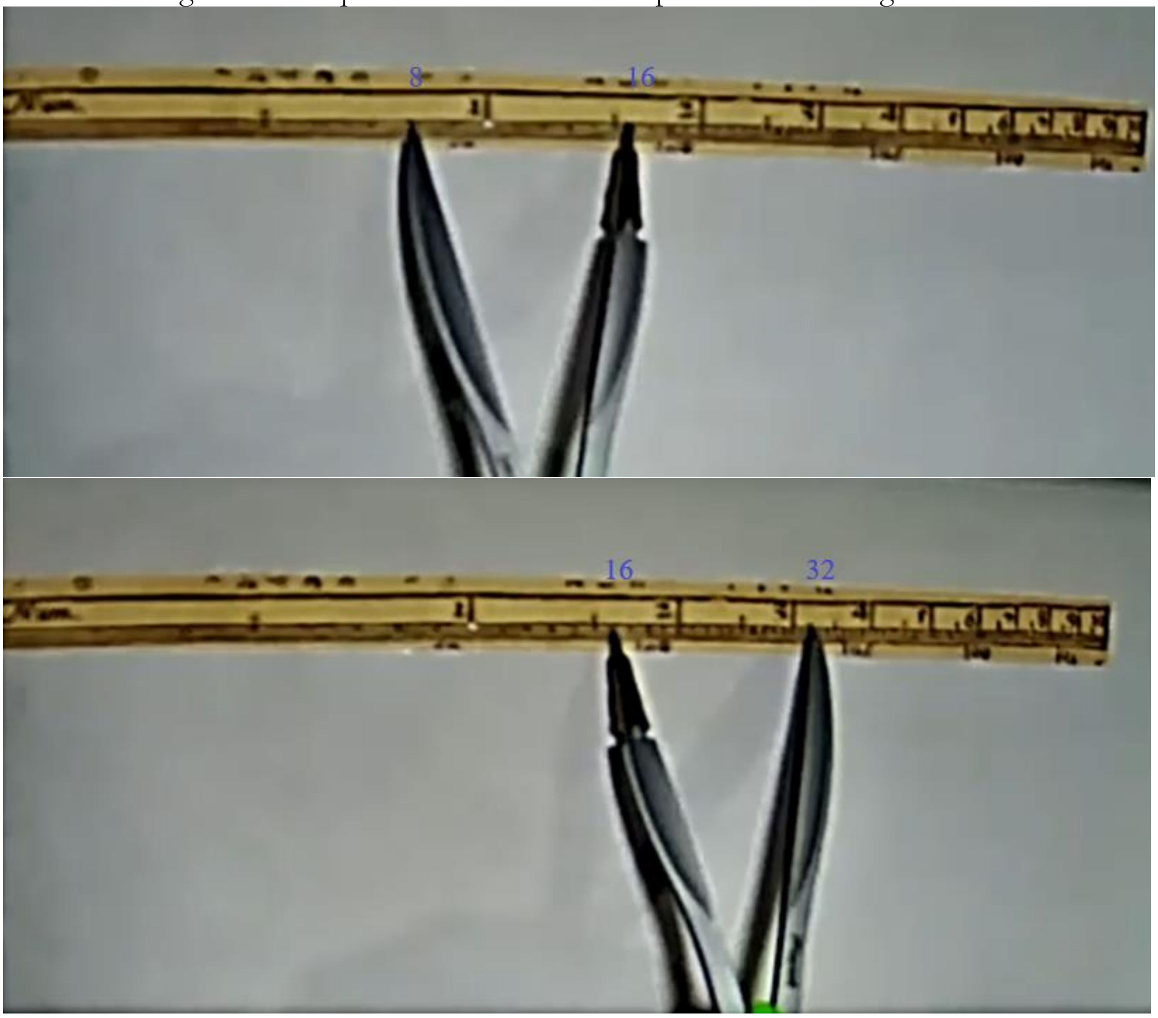
Figura 11 – Registro do logaritmo de 2 com o compasso



Fonte: Adaptado dos dados da pesquisa.

Após registrar no compasso o log de 2, o Aluno B (2021) diz: "Então isso aqui [mostra o compasso com o registro do espaçamento do log de 2] é a metade da distância de 8 para 32. Pra saber onde vai cair [a média desses números] é só colocar uma ponta do compasso no 8 ou no 32". Em seguida, ele posiciona a ponta seca no 8 e a outra ponta cai no 16 no sentido da esquerda para direita e, quando posicionada uma ponta no 32, a outra extremidade vai apontar o número 16, no sentido da direita para o esquerda como observado na sequência de imagens na Figura 12.

Figura 12 – Sequência de movimentos a partir das ideias logarítmicas



Fonte: Adaptado dos dados da pesquisa.

O grupo ainda formaliza essa forma de interpretar matematicamente a médio proporcional no relatório final sobre o problema um. Em que relatam: "Como sabemos que a escala dos números de Gunter tem como base os logaritmos, segue o uso das propriedades dos logaritmos:" (GRUPO 1, 2021). Em seguida eles adicionam a Figura 13 no relatório para enfatizar e formalizar os diálogos que tiveram no decorrer da realização do problema.

Fiura 13 – Os procedimentos matemáticos utilizados pelos discentes ao considerarem os logaritmos

$$\underbrace{8 \rightarrow 32}$$

$$\mathrm{Log}\,32 - \mathrm{Log}\,8 = \mathrm{Log}\,\frac{32}{8} = \mathrm{Log}\,4$$

Logo, a distância de 8 para 32 na escala é igual a Log 4

Dividindo essa distância ao meio temos:

$$\frac{\mathrm{Log}\,4}{2} = \frac{1}{2}\cdot \mathrm{Log}\,4 = \mathrm{Log}\,4^{\frac{1}{2}} = \mathrm{Log}\,\sqrt[2]{4} = \mathrm{Log}\,2$$

Portanto, a distância de 8 para 32 na escala é igual a Log 2

Fonte: Dados da pesquisa.

No relatório o grupo apresenta outra forma de encontrar a metade do log de 4, neste caso eles utilizaram a consequência da propriedade da potência de um logaritmo que "em qualquer base a ($0 < a \neq 1$), o logaritmo da raiz enésima de um número real positivo é igual ao produto do inverso do índice da raiz pelo logaritmo do radicando" (IEZZI; DOLCE; MURAKAMI, 2013, p. 67).

Nessa segunda maneira de interpretar a média proporcional também se caracteriza como um nó semiótico, com base nos logaritmos e revela um aprofundamento no processo de objetivação da média proporcional, uma vez que eles mais uma vez a associam a uma raiz. Nesse momento, os licenciandos mobilizam outros saberes, como o de distância e das propriedades de divisão e de potencia de logaritmos.

Percebe-se que o problema um da tarefa cinco proposta com a manipulação da escala dos números para obter uma média proporcional de dois números com base na Teoria da objetivação possibilitou que os discentes participantes da formação mobilizassem conhecimentos matemáticos como os de de logaritmo incorporado na escala, a primeira vista de modo superficial, com noções básicas, de multiplicação por 10, 100, 1000 etc. ao se referir a cálculos diferentes com a escala, de conceito de mediatriz e da sua construção geométrica utilizado régua não graduada e compasso, de relacionar a média geométrica a uma radiciação, de articulação de diferentes campos da matemática como geometria e aritmética, de mobilização de saberes sobre distância articulada a grandezas dos números, e de saberes mais elaborados de logaritmos no desenvolvimento do problema como as propriedades de divisão e potencia de logaritmos.

Desse modo, a atividade elaborada nos pressupostos da Teoria da Objetivação usando como artefato a escala dos números possibilitou que licenciandos do curso de Matemática pudessem mobilizar saberes matemáticos que, muitas vezes, são vistos separamente e em níveis diferente de escolaridade.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A construção de interface juntamente com a Teoria da Objetivação permite que seja produzida uma atividade que conta com um recurso histórico potencialmente didático que potencializada a possibilidade dos alunos mobilizarem conhecimentos matemáticos que comumente são vistos separadamente e em níveis distintos de escolaridade.

Assim, foi elaborada uma atividade, produzida com base nos pressupostos da TO, tendo como recurso a escala dos números desenvolvida por Edmund Gunter. Essa atividade foi aplicada em uma formação com licenciandos do curso de Matemática em que possibilitou que eles movimentassem alguns saberes matemáticos.

Tendo em vista a formação, objetivou-se neste artigo analisar os saberes matemáticos mobilizados em uma atividade aplicada com licenciandos em Matemática a partir do manuseio da escala dos números. Desse modo, percebeu-se que emergiram várias saberes matemáticos no decorrer da atividade.

Ao analisar o problema um da tarefa cinco constatou-se que os discentes puseram em movimento os saberes de logaritmo e suas propriedades, mediatriz, construção geométrica, média geométrica e multiplicação por 10. Infere-se, observando os saberes que emergiram, que os discentes utilizaram saberes matemáticos que muitas vezes não são associados na Educação Básica, como a articulação de construção geométrica e logaritmo.

REFERÊNCIA

BATISTA, Antonia Naiara de Sousa; PEREIRA, Ana Carolina Costa. A balestilha: um instrumento náutico como recurso para abordar conceitos matemáticos. *Hipátia*, São Paulo, v. 2, n. 1, p. 40-51, 2017.

EUCLIDES. *Os Elementos*. São Paulo: Editora Unesp, 2009. Tradução de: Irineu Bicudo.

GUNTER, Edmund. *The Description and use of the sector. The Crosse-staffe and other instruments, For such as are studious of Mathematicall practise*. London: William Jones, 1623.

IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; MURAKAMI, Carlos. *Fundamentos de matemática elementar, 2*: logaritmos. 10. ed. São Paulo: Atual, 2013.

MOREY, Bernadete. Abordagem semiótica na Teoria da Objetivação. In: GOBARA, Shirley Takeco; RADFORD, Luis (orsg.). *Teoria da Objetivação*: fundamentos e aplicações para o ensino e aprendizagem de ciências e matemática. São Paulo: Livraria da Física, 2020. p. 43-68.

PAIVA, Jussara Patrícia Andrade Alves. *A teoria da objetivação e o desenvolvimento da orientação espacial no ensino-aprendizagem de geometria*. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática). Natal: Universidade Federal do Rio Grande do Norte, 2019.

PEREIRA, Ana Carolina Costa; SAITO, Fumikazu. A reconstrução do Báculo de Petrus Ramus na interface entre história e ensino de matemática. *Revista Cocar*, [s.l.], v. 13, n. 25, p. 342-372, 2019. <http://dx.doi.org/10.31792/rc.v13i25>.

RADFORD, Luis. Methodological Aspects of the Theory of Objectification. *Perspectivas da Educação Matemática*, Mato Grosso do Sul, v. 18, n. 8, p. 547-567, 2015.

RADFORD, Luis. Saber y conocimiento desde la perspectiva de la Teoría de la Objetivación. In: D'AMORE, B.; RADFORD, L. *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas*: problemas semióticos, epistemológicos y prácticos. Bogotá: Ud Editorial, 2017, p. 97-114.

RADFORD, Luis. A Teoria da Objetivação e seu lugar na pesquisa sociocultural em Educação Matemática. In: MORETTI, Vanessa; CEDRO, Wellington. *Educação Matemática e a Teoria Histórico-Cultural:* Um olhar sobre as pesquisas. Campinas: Mercado de Letras, p. 229-261, 2018.

RADFORD, Luis. *The Theory of Objectification*: a vygotskian perspective on knowing and becoming in mathematics teaching and learning. [S.I.]: Brill, 2021.

SAITO, Fumikazu. *História da matemática e suas (re) construções contextuais*. São Paulo: Livraria da Física, 2015.

SAITO, Fumikazu. A reconstrução de antigos instrumentos matemáticos dirigida para formação de professores. *Educação*: Teoria e Prática, [S.L.], v. 29, n. 62, p. 571-589, 2019. <http://dx.doi.org/10.18675/1981-8106.vol29.n62.p571-589>.

SAITO, Fumikazu; DIAS, Marisa da Silva. Interface entre história da matemática e ensino: uma atividade desenvolvida com base num documento do século XVI. *Ciência & Educação* (bauru), [s.l.], v. 19, n. 1, p.89-111, 2013. <http://dx.doi.org/10.1590/s1516-73132013000100007>.

SILVA, Isabelle Coelho da; PEREIRA, Ana Carolina Costa. Definições e Critérios para o Uso de Textos Originais na Articulação entre História e Ensino de Matemática. *Bolema*: Boletim de Educação Matemática, [S.L.], v. 35, n. 69, p. 223-241, 2021. <http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v35n69a11>.

SANTOS, Andressa Gomes dos; OLIVEIRA, Adriana Nogueira de; PEREIRA, Ana Carolina Costa. As contribuições da régua de cálculo linear na construção dos saberes e das práticas docentes. *Boletim Online de Educação Matemática*, [S.L.], v. 8, n. 15, p. 17-36, 2020. <http://dx.doi.org/10.5965/2357724x08152020017>.

SANTOS, Andressa Gomes dos; PEREIRA, Ana Carolina Costa. Questões didáticas envolvendo as escalas do Cross-Staff (1623) elaborado por Edmund Gunter. *Revista de Produção Discente em Educação Matemática*, São Paulo, v. 10, n. 1/2, p. 105-118, 2021. <https://doi.org/10.23925/2238-8044.%202021v10i1p105-118>.

SANTOS, Andressa Gomes dos. *Os aspectos matemáticos relacionados à média geométrica que emergem a partir da manipulação da escala dos números (1623) elaborada por Edmund Gunter com licenciandos em matemática*. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática). Fortaleza: Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará, 2022.

VAN POELJE, Otto E. The Navigation Scale, Improved by B. Donn. *Journal of the Oughtred Society*, v. 14, p. 36-42, 2005.

CONTRIBUIÇÃO DAS/DOS AUTORES/AS

Autora 1 – Coleta e análise dos dados e escrita do texto.
Autor 2 – Orientação da pesquisa.

DECLARAÇÃO DE CONFLITO DE INTERESSE

Os autores declaram que não há conflito de interesse com o presente artigo.