Estado da publicação: O preprint não foi publicado em outro meio.

O Teorema de Menelaus como chave de demonstração

Raphael Ramon Oliveira Araujo

https://doi.org/10.1590/SciELOPreprints.18977

Submetido em: 2026-11-18
Postado em: 2026-11-27 (versão 1)
(AAAA-MM-DD)

A moderação deste preprint recebeu o(s) endosso(s) de:

- João Carlos Souza (ORCID: https://orcid.org/0000-0003-4053-8211)

SciELO Preprints - Este documento é um preprint e sua situação atual está disponível em: https://doi.org/10.1590/SciELOPreprints.18977

O Teorema de Menelaus como chave de demonstração

Verificação no GeoGebra e aplicação aos teoremas de Desargues, Pappus e Pascal

Raphael Ramon Oliveira Araujo

Secretaria Municipal de Educação de Teresina, Teresina, Piauí, Brasil

ORCID: https://orcid.org/0009-0009-0254-7847

raphaelaraujo2829@gmail.com

Resumo

Este artigo tem por objetivo apresentar o Teorema de Menelaus como instrumento de demonstração e propor uma forma interativa de abordá-lo em sala de aula. O teorema estabelece um critério para a colinearidade de três pontos situados sobre as retas suporte dos lados de um triângulo: o produto de três razões de segmentos vale 1 se, e somente se, os pontos forem colineares. Para isso demonstramos inicialmente o teorema e a sua recíproca, utilizando semelhança de triângulos e a unicidade do ponto divisor de um segmento. Em seguida descrevemos uma construção no software GeoGebra que torna visível a invariância do produto, pois ao deformarmos o triângulo as três razões mudam e o produto permanece igual a 1, de modo que o estudante observa o resultado antes de demonstrá-lo. Depois apresentamos uma questão do vestibular do Instituto Militar de Engenharia resolvida com o teorema e mostramos que as demonstrações dos teoremas de Desargues, de Pappus e de Pascal seguem um mesmo procedimento, que consiste em aplicar o Teorema de Menelaus a uma família de triângulos, multiplicar as relações obtidas, cancelar os fatores repetidos e reconhecer no que resta a recíproca do teorema. Por fim apresentamos algumas considerações sobre pré-requisitos e sequência didática.

Palavras-chave: Teorema de Menelaus. Colinearidade. GeoGebra. Geometria dinâmica. Ensino de geometria.

Menelaus' Theorem as a proof device: verification in GeoGebra and application to the theorems of Desargues, Pappus and Pascal

Abstract

This paper aims to present Menelaus' Theorem as a proof device and to propose an interactive approach to it in the classroom. The theorem establishes a criterion for the collinearity of three points lying on the lines supporting the sides of a triangle: a product of three segment ratios equals 1 if and only if the points are collinear. To this end we first prove the theorem and its converse, using similarity of triangles and the uniqueness of the point dividing a segment in a given ratio. We then describe a construction in the GeoGebra software that makes the invariance of the product visible, since as the triangle is dragged the three ratios change while their product remains equal to 1, so that the student observes the result before proving it. We next present a problem from the entrance examination of the Military Institute of Engineering solved by means of the theorem, and we show that the proofs of the theorems of Desargues, Pappus and Pascal follow one and the same procedure, which consists in applying Menelaus' Theorem to

SciELO Preprints - Este documento é um preprint e sua situação atual está disponível em: https://doi.org/10.1590/SciELOPreprints.18977

a family of triangles, multiplying the resulting relations, cancelling the repeated factors and recognising in what remains the converse of the theorem. Finally we present some remarks on prerequisites and classroom sequence.

Keywords: Menelaus' Theorem. Collinearity. GeoGebra. Dynamic geometry. Geometry teaching.

1 Introdução

O Teorema de Menelaus aparece na *Sphaerica*, obra de Menelau de Alexandria escrita por volta do ano 100 da nossa era. Apesar de sua antiguidade e de sua utilidade, esse teorema praticamente desapareceu dos livros didáticos do ensino médio brasileiro na segunda metade do século XX. Ele não está sozinho nessa situação. Alves (2015) reúne sob o título de *teoremas esquecidos* um conjunto de resultados de geometria plana que deixaram de ser ensinados sem que nada de equivalente ocupasse o seu lugar.

Observe que o que se perde nesse caso não é apenas um enunciado. O Teorema de Menelaus é um teorema de critério, e é justamente isso que o torna útil. Decidir se três pontos de uma figura estão alinhados é uma pergunta qualitativa, e o estudante tende a respondê-la apenas olhando para a figura, o que nem sempre funciona em geometria. O teorema transforma essa pergunta em um cálculo, pois o produto de três razões de segmentos vale 1 se, e somente se, os pontos forem colineares. Com a recíproca podemos percorrer o caminho no sentido inverso e provar a colinearidade a partir de uma igualdade numérica. É esse sentido que faz do teorema um instrumento de demonstração.

Dessa forma, ao deixarmos o teorema de lado perdemos também uma família inteira de resultados clássicos. Os teoremas de Desargues, de Pappus e de Pascal, a reta de Simson-Wallace, a reta de Gauss-Newton e a concorrência das medianas de um triângulo têm demonstrações curtas quando dispomos do Teorema de Menelaus, e demonstrações longas ou inacessíveis quando não dispomos. Além disso esses resultados continuam aparecendo em olimpíadas e em vestibulares de instituições militares, como mostra Martins (2015), de modo que o estudante os encontra sem ter recebido a ferramenta que os organiza.

Existe uma razão didática para essa ausência e convém examiná-la. A demonstração do teorema não exige nada além de semelhança de triângulos e de uma reta auxiliar paralela a um dos lados, conteúdos que o aluno estuda no nono ano. Assim, o obstáculo não está na demonstração, mas no enunciado. Três razões cujo produto vale 1 é uma afirmação sem apelo intuitivo, e o estudante que a encontra pela primeira vez na forma de uma fórmula tende a memorizá-la em vez de compreendê-la. O produto não diz nada a quem não viu as razões variarem.

É nesse ponto que a geometria dinâmica pode ajudar. Em uma construção no GeoGebra na qual as três razões e o seu produto aparecem calculados na tela, ao arrastarmos um vértice do triângulo as razões mudam todas e o produto permanece igual a 1. A invariância deixa de

SciELO Preprints - Este documento é um preprint e sua situação atual está disponível em: https://doi.org/10.1590/SciELOPreprints.18977

ser uma afirmação do professor e passa a ser uma observação do aluno. A demonstração vem depois, com a finalidade de explicar um fato que a turma já constatou, e não de estabelecer um fato novo. Essa inversão de ordem é a proposta didática que apresentamos neste trabalho.

Os resultados e a construção que apresentamos aqui derivam da dissertação de mestrado do autor (Araujo, 2017), defendida no Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal do Piauí, e são neste artigo reorganizados e ampliados.

Organizamos o artigo da seguinte maneira. Na Seção 2 enunciamos o teorema e a sua recíproca e apresentamos as demonstrações. Na Seção 3 descrevemos, em dez passos, a construção no GeoGebra que torna a invariância visível. Na Seção 4 resolvemos uma questão do vestibular do Instituto Militar de Engenharia. Na Seção 5 aplicamos o teorema às demonstrações de Desargues, de Pappus e de Pascal e mostramos o que elas têm em comum. Por fim, na Seção 6, reunimos algumas considerações sobre pré-requisitos e sequência didática.

2 O Teorema de Menelaus e sua recíproca

Adotamos a notação de Barbosa (2012), também empregada por Caminha (2012). Dado um triângulo ABC, escrevemos r_{AB}, r_{BC} e r_{CA} para as retas suporte dos seus lados.

Teorema 1 (Menelaus)**.** *Sejam L, M e N pontos situados, respectivamente, sobre as retas suporte r_{AB}, r_{BC} e r_{CA} dos lados de um triângulo ABC, todos distintos dos vértices. Então L, M e N são colineares se, e somente se,*

$$\frac{LA}{AN} \cdot \frac{NC}{CM} \cdot \frac{MB}{BL} = 1. \tag{1}$$

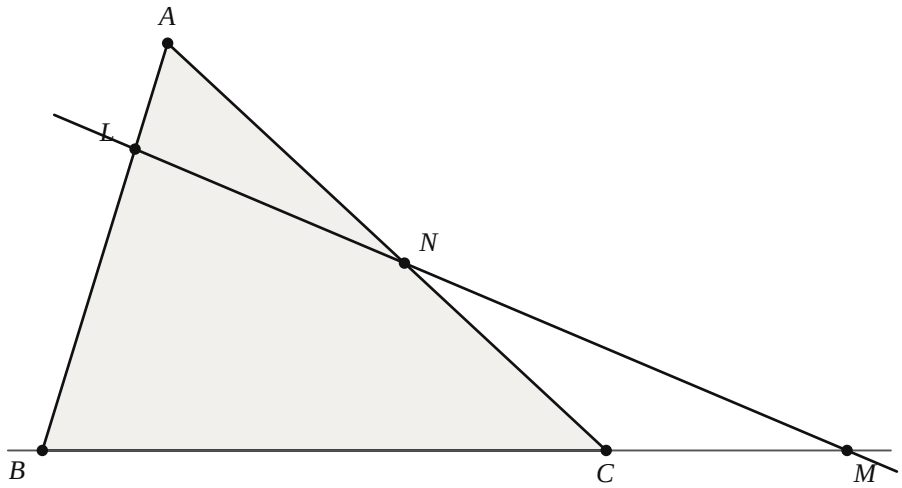


Figura 1 – Os pontos L, M e N sobre as retas suporte dos lados do triângulo ABC.
Fonte: o autor.

SciELO Preprints - Este documento é um preprint e sua situação atual está disponível em: https://doi.org/10.1590/SciELOPreprints.18977

2.1 A condição é necessária

Suponhamos que L, M e N sejam colineares. Pelo vértice C traçamos uma reta g paralela à reta suporte r_{AB} e marcamos P, interseção de g com a reta que contém os três pontos.

Observe que a reta g e a reta r_{AB} formam um feixe de duas paralelas, cortado pelas transversais r_{LM} e r_{BC}. Daí decorrem as congruências de ângulos indicadas na Figura 2 e, a partir delas, duas semelhanças de triângulos pelo critério ângulo-ângulo.

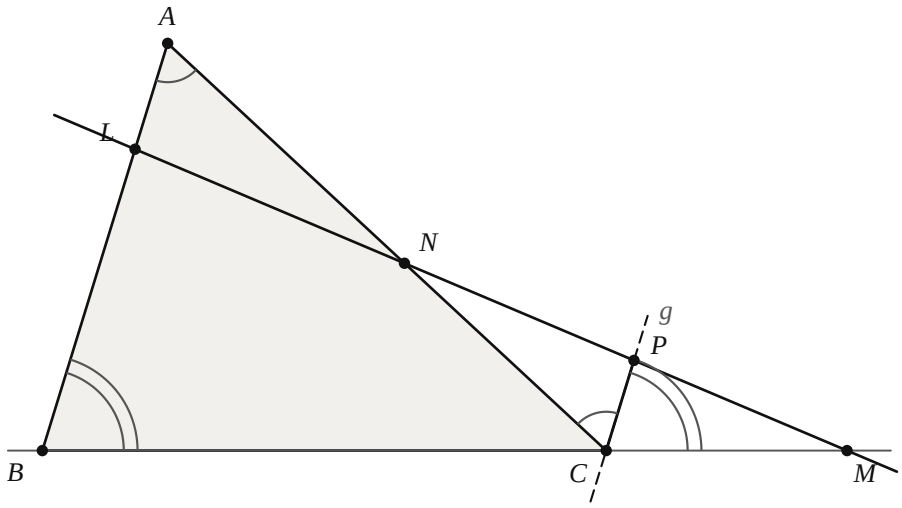


Figura 2 – A paralela traçada por C e os ângulos congruentes que ela determina.
Fonte: o autor.

Da semelhança entre os triângulos CPN e NAL obtemos a proporção $LA/CP = AN/CN$, ou seja,

$$CP = \frac{LA \cdot CN}{AN}. \tag{2}$$

Da semelhança entre os triângulos MPC e MLB obtemos $MC/MB = CP/BL$, ou seja,

$$CP = \frac{MC \cdot BL}{MB}. \tag{3}$$

Note que o segmento CP aparece nas duas igualdades. Dividindo (2) por (3), o quociente do primeiro membro vale 1 e resta

$$\frac{LA \cdot CN}{AN} \cdot \frac{MB}{MC \cdot BL} = 1,$$

que é precisamente a relação (1).

SciELO Preprints - Este documento é um preprint e sua situação atual está disponível em: https://doi.org/10.1590/SciELOPreprints.18977

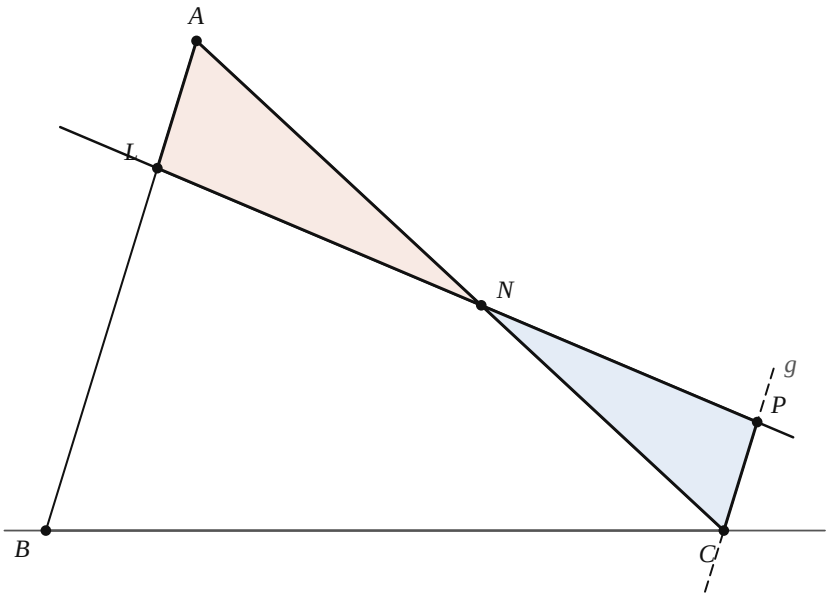


Figura 3 – Semelhança entre os triângulos *CPN* e *NAL*.
Fonte: o autor.

2.2 A condição é suficiente

A recíproca é o que transforma o teorema em instrumento de demonstração. O seu argumento se apoia em um fato elementar, que destacamos a seguir.

Lema 2. *Dado um segmento AB e um número real positivo k, existe um único ponto da reta r_{AB} que divide AB na razão k.*

Suponhamos agora que L, M e N estejam sobre as retas suporte dos lados de ABC e satisfaçam a relação (1), sem que saibamos se são colineares. Tomemos sobre r_{AB} o ponto L' em que a reta MN a intersecta. Por construção L', M e N são colineares, de modo que a parte já demonstrada nos garante

$$\frac{L'A}{AN} \cdot \frac{NC}{CM} \cdot \frac{MB}{BL'} = 1. \tag{4}$$

Dividindo (4) pela hipótese (1), todos os fatores que envolvem M e N se cancelam e resta

$$\frac{L'A}{BL'} \cdot \frac{BL}{LA} = 1, \qquad \text{ou seja} \qquad \frac{L'A}{BL'} = \frac{LA}{BL}.$$

Logo os pontos L e L' dividem o segmento AB na mesma razão e, pelo Lema, concluímos que $L' = L$. Portanto os três pontos são colineares. ■

Observe o que a demonstração da recíproca faz. Ela não constrói a reta que passa pelos três pontos, mas mostra que não há lugar para um quarto ponto. Esse tipo de argumento, que consiste em supor o objeto desejado, obter uma segunda igualdade e concluir por unicidade, aparecerá novamente na Seção 5, em cada uma das três demonstrações.

SciELO Preprints - Este documento é um preprint e sua situação atual está disponível em: https://doi.org/10.1590/SciELOPreprints.18977

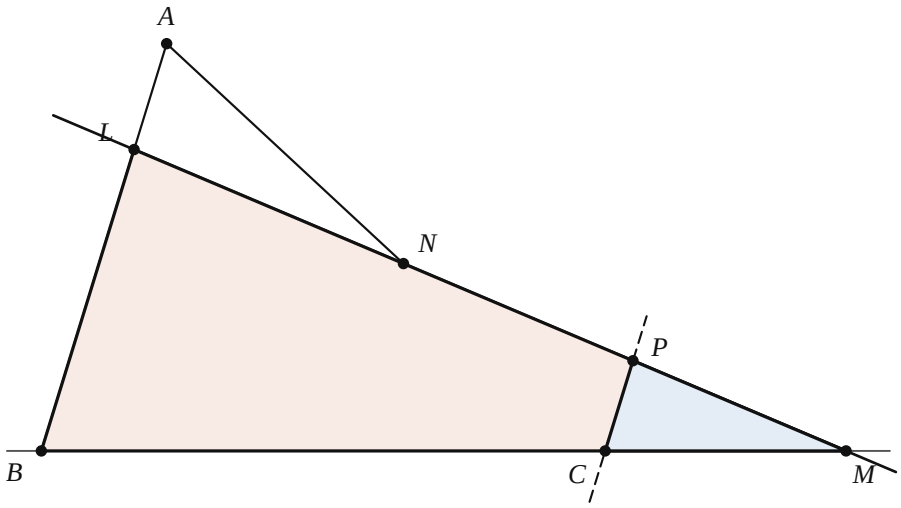


Figura 4 – Semelhança entre os triângulos MPC e MLB.
Fonte: o autor.

3 Utilização do GeoGebra para verificação do teorema

A construção que descrevemos a seguir leva cerca de quinze minutos e utiliza apenas ferramentas básicas do GeoGebra, cujo uso introdutório é apresentado por Araújo (2010). A sua finalidade não é ilustrar o teorema depois de demonstrado, mas produzir, antes da demonstração, uma situação em que o estudante observe a invariância e pergunte por que ela ocorre.

1. Com a ferramenta **Polígono**, construímos um triângulo ABC de medida qualquer.
2. Com a ferramenta **Reta**, traçamos a reta suporte do lado BC. Ela será necessária porque um dos três pontos costuma cair fora do lado.
3. Com a ferramenta **Ponto**, marcamos L sobre o lado AB e N sobre o lado CA, ambos distintos dos vértices.
4. Traçamos a reta que passa por L e N.
5. Com **Interseção de dois objetos**, marcamos M, interseção da reta LN com a reta suporte de BC. Observe que os três pontos colineares já estão postos, pois a colinearidade foi construída e não verificada.
6. Com **Reta paralela**, traçamos por C a paralela à reta suporte de AB. É a reta auxiliar da demonstração, e convém que ela esteja na tela desde o início.
7. Marcamos P, interseção dessa paralela com a reta LN.
8. Na caixa de entrada, definimos as três razões, uma por linha:
   `d = Distância(L,A)/Distância(A,N)`

SciELO Preprints - Este documento é um preprint e sua situação atual está disponível em: https://doi.org/10.1590/SciELOPreprints.18977

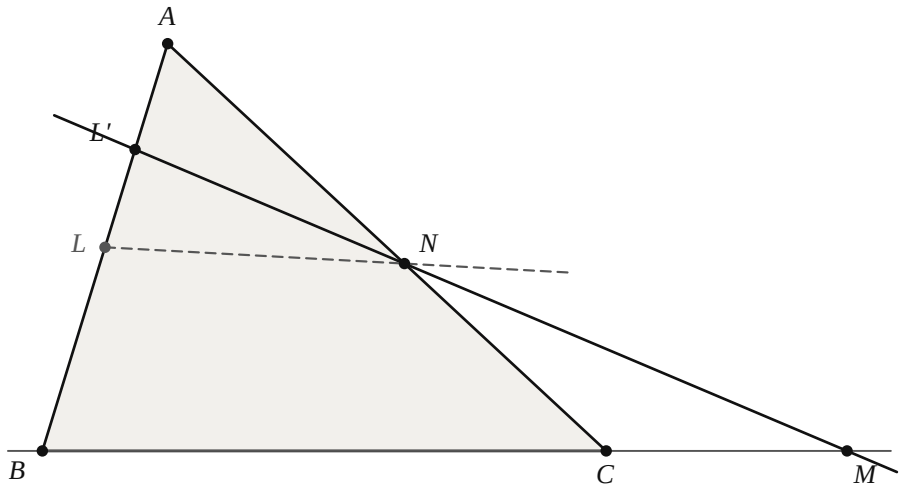


Figura 5 – A recíproca: o ponto L' sobre a reta suporte de AB.
Fonte: o autor.

```
e = Distância(N,C)/Distância(C,M)
h = Distância(M,B)/Distância(B,L)
```

9. Definimos `i = d*e*h`. A janela de álgebra passa a exibir os quatro números.

10. Inserimos uma caixa de texto com a fórmula do teorema e, abaixo dela, outra que mostre os valores correntes de d, e, h e do produto.

Feito isso, arrastamos o vértice C. As três razões mudam todas, e em geral mudam muito, mas o produto não se move. Nas duas telas reproduzidas nas Figuras 6 e 7, obtidas da mesma construção, o triângulo passa de uma configuração quase degenerada para outra bem aberta, e as razões saem de $0{,}4 \cdot 3{,}35 \cdot 0{,}75$ para $0{,}96 \cdot 0{,}44 \cdot 2{,}38$. Nos dois casos o produto vale 1.

Três perguntas costumam organizar bem esse momento da aula. A primeira é se algum dos três números fica parado quando arrastamos o vértice, e a resposta negativa é imediata na tela. A segunda é por que, então, o produto não muda, e essa não tem resposta na tela, pois é exatamente a pergunta que a demonstração responde. A terceira, mais sutil, é o que acontece se arrastarmos L para fora do segmento AB. Nesse caso o ponto sai do lado e passa para o seu prolongamento, a razão correspondente muda de comportamento e o produto continua valendo 1, o que nos leva naturalmente à discussão sobre razões orientadas e sobre a razão pela qual o enunciado fala em retas suporte, e não em lados.

Convém registrar uma limitação. O GeoGebra calcula com aproximações, de modo que o valor exibido é 1 até a precisão da tela, e não 1 demonstrado. Essa diferença não é um defeito da atividade, mas o seu ponto de apoio, pois o software estabelece a confiança e a demonstração estabelece a certeza. Explicitar isso para a turma é uma oportunidade de discutir o que distingue

SciELO Preprints - Este documento é um preprint e sua situação atual está disponível em: https://doi.org/10.1590/SciELOPreprints.18977

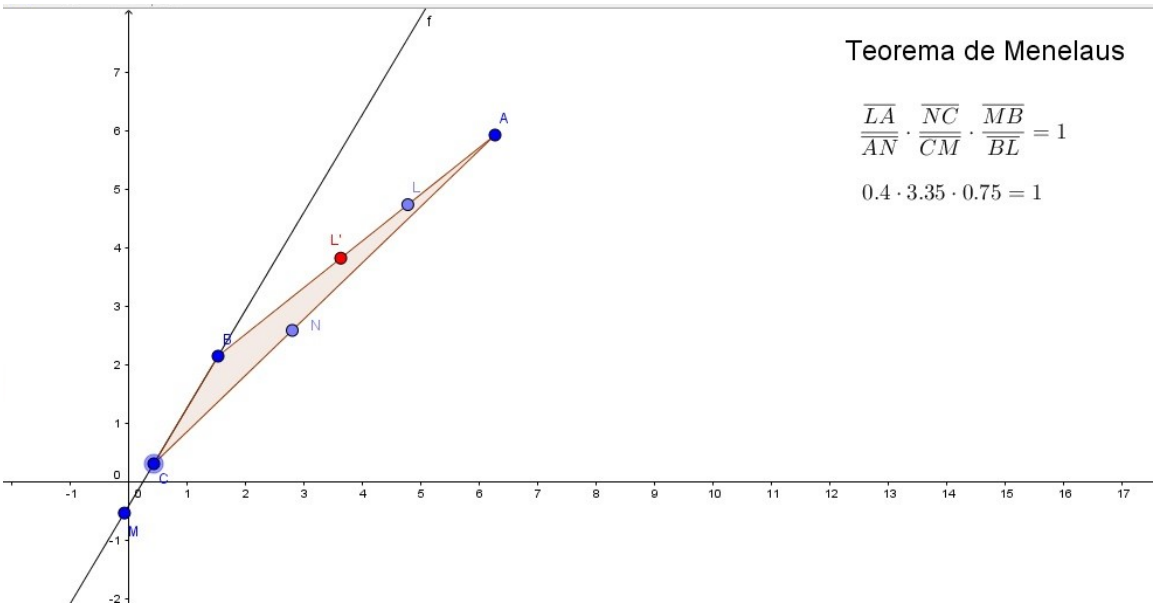


Figura 6 – A construção no GeoGebra, com as três razões e o seu produto exibidos na tela.
Fonte: o autor.

a evidência empírica da prova matemática, discussão que raramente encontra uma ocasião tão concreta.

4 Aplicação em uma questão de vestibular

O Teorema de Menelaus aparece com regularidade em provas de instituições militares e em olimpíadas, e Thiago ([s.d.]) reúne uma coletânea de problemas resolvidos com ele e com o teorema de Ceva. A questão que selecionamos a seguir, do vestibular do Instituto Militar de Engenharia de 2015/2016, mostra o seu uso típico, pois o enunciado pede uma razão que é exatamente um dos fatores da relação de Menelaus.

> Uma corda intercepta o diâmetro de um círculo de centro O no ponto C' segundo um ângulo de $45°$. Sejam A e B os pontos extremos desta corda, e a distância AC' igual a $(\sqrt{3}+1)$ cm. O raio do círculo mede 2 cm, e C é a extremidade do diâmetro mais distante de C'. O prolongamento do segmento AO intercepta BC em A'. Calcule a razão em que A' divide BC.

Solução. Seja $x = OC'$. Aplicando a lei dos cossenos no triângulo $OC'A$ obtemos

$$2^2 = (\sqrt{3}+1)^2 + x^2 - 2x(\sqrt{3}+1)\cos 45°,$$

ou seja,

$$x^2 - (\sqrt{6}+\sqrt{2})x + 2\sqrt{3} = 0 \iff (x-\sqrt{6})(x-\sqrt{2}) = 0.$$

Como C' é interior ao círculo, temos $OC' < 2$, o que exclui a raiz $\sqrt{6}$. Logo $OC' = \sqrt{2}$.

Seja T o ponto médio de AB. O triângulo AOB é isósceles, pois OA e OB são raios, e portanto OT é perpendicular a AB. No triângulo retângulo OTC' o ângulo em C' mede $45°$ e

SciELO Preprints - Este documento é um preprint e sua situação atual está disponível em: https://doi.org/10.1590/SciELOPreprints.18977

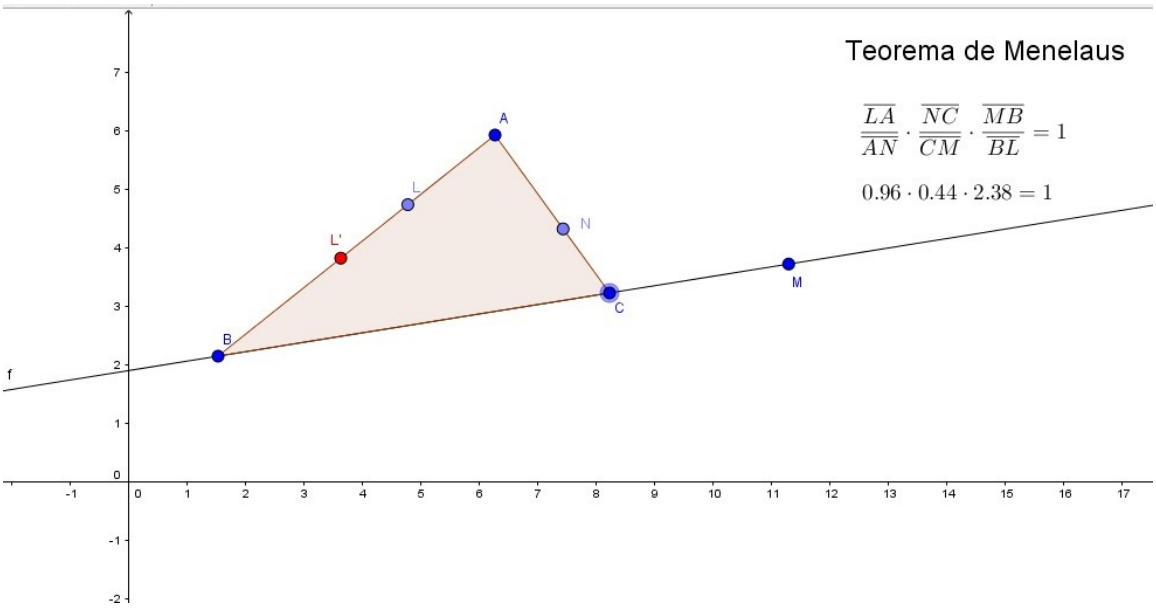


Figura 7 – A mesma construção após o arrasto do vértice C, com as três razões alteradas e o produto ainda igual a 1.

Fonte: o autor.

a hipotenusa OC' mede $\sqrt{2}$, de modo que $OT = TC' = 1$. Segue que $AT = TB = \sqrt{3}$ e, dessa forma, $AB = 2\sqrt{3}$ e $BC' = \sqrt{3} - 1$.

Aplicamos agora o Teorema de Menelaus ao triângulo $CC'B$, tomando como transversal a reta que contém A e A':

$$\frac{A'C}{A'B} \cdot \frac{OC'}{OC} \cdot \frac{AB}{AC'} = 1.$$

Substituindo $OC' = \sqrt{2}$, $OC = 2$, $AB = 2\sqrt{3}$ e $AC' = \sqrt{3}+1$, obtemos

$$\frac{A'C}{A'B} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1} = 1 \implies \frac{A'C}{A'B} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{6}} = \frac{3\sqrt{2}+\sqrt{6}}{6}.$$

Portanto o ponto A' divide BC nessa razão. ■

Observe onde está a economia. Sem o teorema, a questão exige coordenadas ou uma cadeia de semelhanças. Com o teorema, toda a geometria do problema se concentra em determinar quatro comprimentos, e o restante é substituição. Essa é a marca de um teorema de critério, pois ele não encurta a parte difícil do problema, mas altera qual é a parte difícil.

5 Aplicação em outros teoremas

Nesta seção apresentamos três teoremas da geometria projetiva que necessitam da aplicação do Teorema de Menelaus em alguma passagem de suas demonstrações. São eles os teoremas de Desargues, de Pappus e de Pascal, que costumam ser apresentados como resultados independentes, cada um com a sua demonstração própria. Quando dispomos da recíproca de Menelaus, porém, os três se deixam demonstrar por um mesmo procedimento, que isolamos aqui

SciELO Preprints - Este documento é um preprint e sua situação atual está disponível em: https://doi.org/10.1590/SciELOPreprints.18977

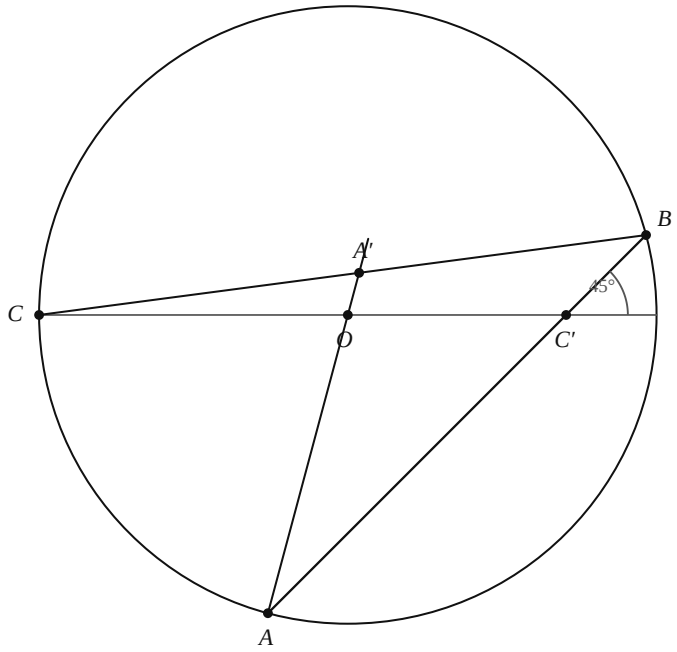


Figura 8 – Representação gráfica da questão do IME 2015/2016.
Fonte: o autor.

em quatro passos:

1. escolhemos um triângulo auxiliar cujas retas suporte contenham os pontos cuja colinearidade queremos provar;
2. aplicamos o Teorema de Menelaus a cada terna de pontos já sabidamente colinear, pois é a hipótese do teorema que queremos demonstrar que nos fornece essas ternas;
3. multiplicamos as relações membro a membro, de modo que os fatores que não interessam, por comparecerem aos pares, um como razão e outro como a sua inversa, desapareçam;
4. reconhecemos no que resta o produto da recíproca e concluímos a colinearidade.

O que varia de um caso para o outro é pouco. Desargues necessita de três triângulos auxiliares e de um único produto, Pappus necessita de um só triângulo, mas de cinco ternas, e de uma divisão em vez de um produto, e Pascal necessita de um triângulo, três ternas e de um ingrediente externo, a potência de um ponto, para que o cancelamento se complete.

5.1 Teorema de Desargues

Teorema 3. *Se dois triângulos têm os vértices dois a dois sobre três retas concorrentes, então os seus lados correspondentes se cortam em três pontos colineares.*

SciELO Preprints - Este documento é um preprint e sua situação atual está disponível em: https://doi.org/10.1590/SciELOPreprints.18977

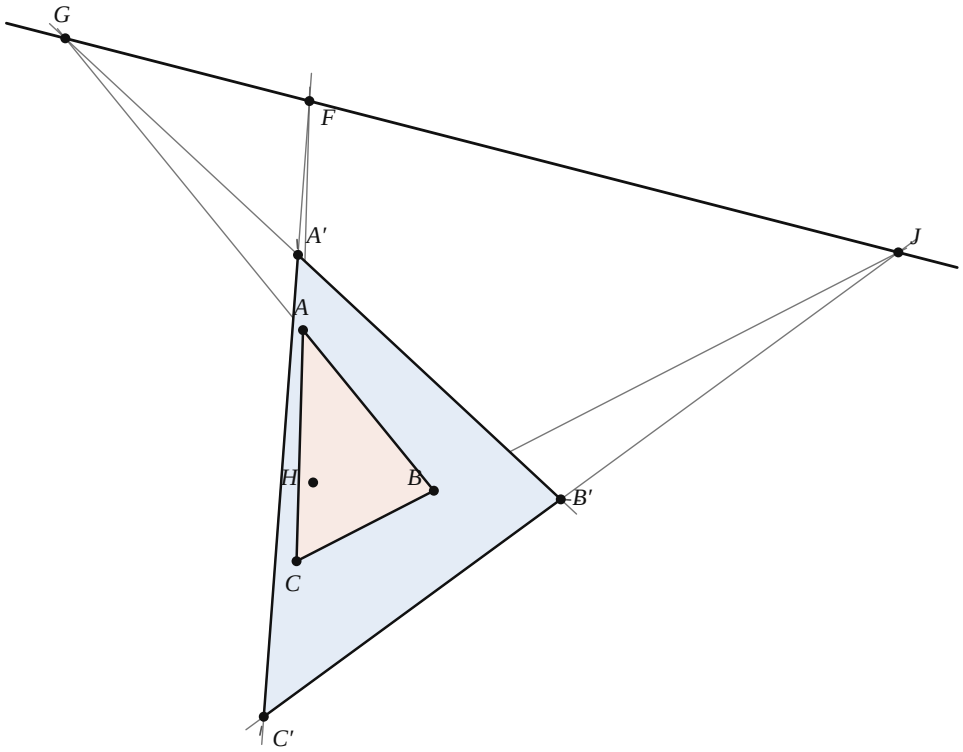


Figura 9 – Os triângulos ABC e $A'B'C'$ com vértices sobre três retas concorrentes em H, e a reta que contém G, F e J.

Fonte: o autor.

Sejam ABC e $A'B'C'$ os triângulos, H o ponto de concorrência das retas AA', BB' e CC', e sejam J, F e G as interseções dos lados correspondentes. Aplicamos o Teorema de Menelaus aos triângulos HBC, HAB e HAC, com as ternas de pontos colineares $\{J,B',C'\}$, $\{G,A',B'\}$ e $\{F,A',C'\}$, respectivamente:

$$\frac{BJ}{CJ}\cdot\frac{CC'}{HC'}\cdot\frac{HB'}{BB'}=1, \tag{5}$$

$$\frac{CF}{AF}\cdot\frac{AA'}{HA'}\cdot\frac{HC'}{CC'}=1, \tag{6}$$

$$\frac{AG}{BG}\cdot\frac{BB'}{HB'}\cdot\frac{HA'}{AA'}=1. \tag{7}$$

Multiplicando (5), (6) e (7) membro a membro, cada razão que envolve H aparece uma vez no numerador e uma vez no denominador, e resta

$$\frac{BJ}{CJ}\cdot\frac{CF}{AF}\cdot\frac{AG}{BG}=1,$$

que é a condição da recíproca de Menelaus para o triângulo ABC. Logo J, F e G são colineares. ■

SciELO Preprints - Este documento é um preprint e sua situação atual está disponível em: https://doi.org/10.1590/SciELOPreprints.18977

5.2 Teorema de Pappus

Teorema 4. *Se um hexágono tem três de seus vértices sobre uma reta e os outros três sobre outra reta, então os três pontos de interseção dos lados opostos são colineares.*

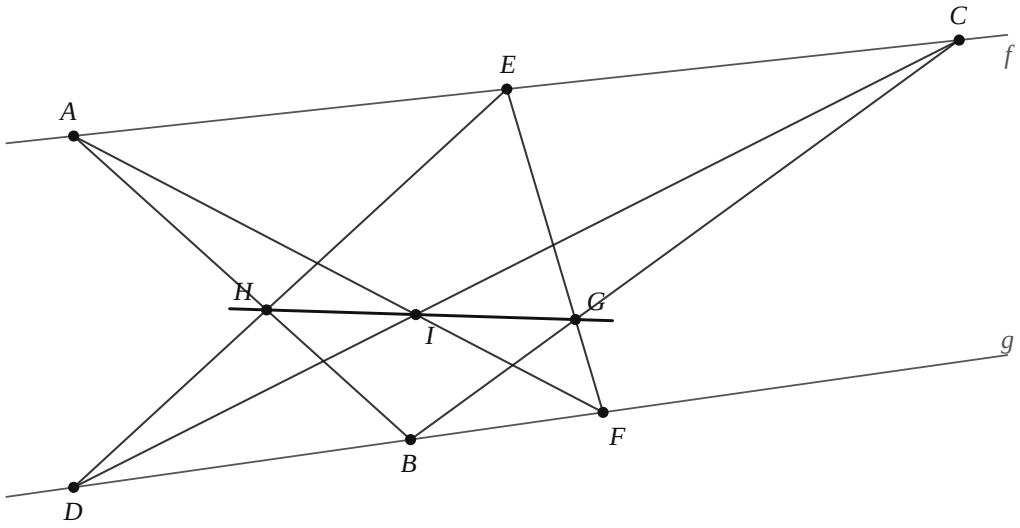


Figura 10 – O hexágono $ABCDEF$ com vértices alternados sobre as retas f e g, e a reta que contém H, I e G.

Fonte: o autor.

Seja $ABCDEF$ o hexágono, com A, C e E sobre a reta f e B, D e F sobre a reta g. Sejam H a interseção de AB com ED, I a interseção de CD com AF e G a interseção de BC com EF.

Tomamos como triângulo auxiliar o triângulo JKL determinado pelas retas AB, CD e EF, de modo que o lado JK fica sobre AB, o lado KL sobre CD e o lado JL sobre EF.

Observe que cinco ternas de pontos são colineares por construção, a saber $\{D,E,H\}$, $\{A,F,I\}$, $\{B,C,G\}$, $\{A,C,E\}$ e $\{B,D,F\}$. As duas últimas são as próprias retas f e g, isto é, a hipótese do teorema. Aplicando o Teorema de Menelaus ao triângulo JKL para cada uma delas, obtemos

$$\frac{JH}{HK}\cdot\frac{KD}{DL}\cdot\frac{LE}{EJ}=1, \tag{8}$$

$$\frac{JA}{AK}\cdot\frac{KI}{IL}\cdot\frac{LF}{FJ}=1, \tag{9}$$

$$\frac{JB}{BK}\cdot\frac{KC}{CL}\cdot\frac{LG}{GJ}=1, \tag{10}$$

$$\frac{JA}{AK}\cdot\frac{KC}{CL}\cdot\frac{LE}{EJ}=1, \tag{11}$$

$$\frac{JB}{BK}\cdot\frac{KD}{DL}\cdot\frac{LF}{FJ}=1. \tag{12}$$

Multiplicamos (8), (9) e (10) membro a membro e, separadamente, multiplicamos (11)

SciELO Preprints - Este documento é um preprint e sua situação atual está disponível em: https://doi.org/10.1590/SciELOPreprints.18977

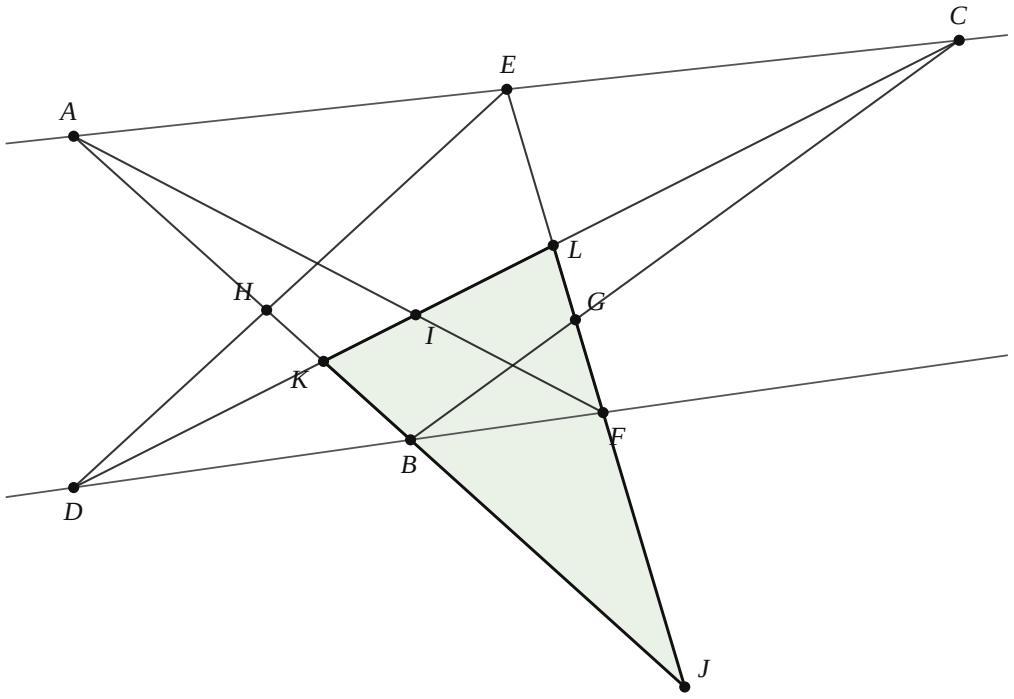


Figura 11 – O triângulo auxiliar JKL, determinado pelas retas AB, CD e EF.
Fonte: o autor.

e (12). Dividindo o primeiro produto pelo segundo, os seis fatores do segundo comparecem também no primeiro e se cancelam, de modo que resta

$$\frac{JH}{HK} \cdot \frac{KI}{IL} \cdot \frac{LG}{GJ} = 1.$$

Como H está sobre JK, I sobre KL e G sobre JL, a recíproca aplicada ao triângulo JKL nos dá a colinearidade de H, I e G. ■

5.3 Teorema de Pascal

Teorema 5. *Em todo hexágono inscrito numa circunferência, convexo ou não, os pontos de interseção dos lados opostos são colineares. A reta que os contém chama-se reta de Pascal.*

Seja $ABCDEF$ o hexágono inscrito e sejam I a interseção de AB com DE, J a interseção de CD com FA e H a interseção de BC com EF. Tomamos como triângulo auxiliar o triângulo KLM determinado pelas retas AB, CD e EF, sendo K a interseção de AB com EF, L a interseção de AB com CD e M a interseção de CD com EF. Dessa forma o lado KL fica sobre AB, o lado LM sobre CD e o lado MK sobre EF.

Aplicando o Teorema de Menelaus ao triângulo KLM com as ternas $\{D,I,E\}$, $\{A,F,J\}$

SciELO Preprints - Este documento é um preprint e sua situação atual está disponível em: https://doi.org/10.1590/SciELOPreprints.18977

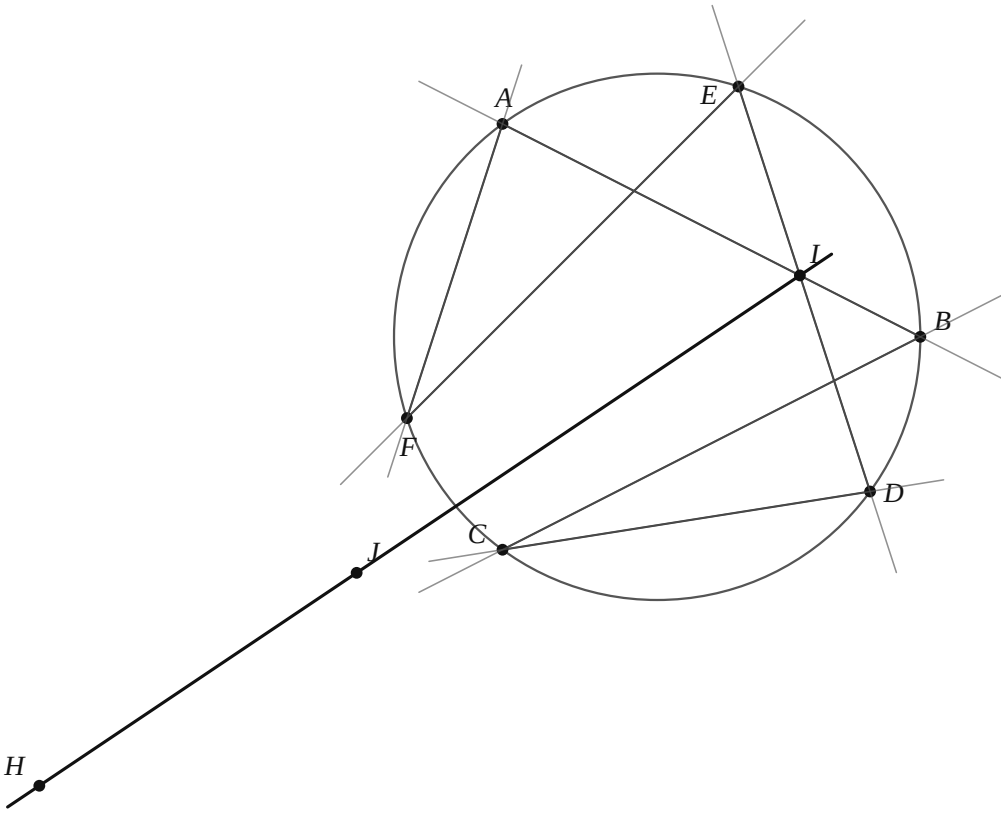


Figura 12 – O hexágono inscrito e a reta de Pascal, que contém H, I e J.
Fonte: o autor.

e $\{B,C,H\}$, obtemos

$$\frac{KI}{LI}\cdot\frac{LD}{MD}\cdot\frac{ME}{KE}=1, \tag{13}$$

$$\frac{KA}{LA}\cdot\frac{LJ}{MJ}\cdot\frac{MF}{KF}=1, \tag{14}$$

$$\frac{KB}{LB}\cdot\frac{LC}{MC}\cdot\frac{MH}{KH}=1. \tag{15}$$

Multiplicando as três, diferentemente dos casos anteriores, os fatores indesejados não se cancelam sozinhos. É aqui que utilizamos a potência de um ponto em relação à circunferência, que nos fornece as três igualdades

$$ME\cdot MF=MC\cdot MD, \qquad KA\cdot KB=KE\cdot KF, \qquad LC\cdot LD=LA\cdot LB.$$

Agrupando no produto os fatores relativos a cada um dos vértices K, L e M, cada grupo se reduz a 1 por uma dessas igualdades, e resta

$$\frac{KI}{LI}\cdot\frac{LJ}{MJ}\cdot\frac{MH}{KH}=1.$$

SciELO Preprints - Este documento é um preprint e sua situação atual está disponível em: https://doi.org/10.1590/SciELOPreprints.18977

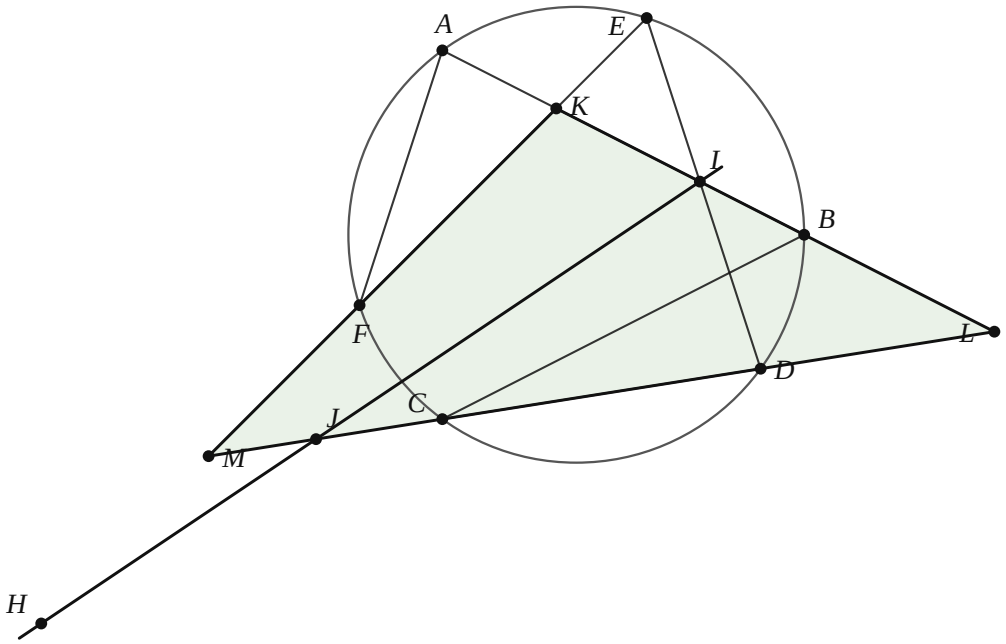


Figura 13 – Construção auxiliar da demonstração do Teorema de Pascal.
Fonte: o autor.

Portanto, pela recíproca, H, I e J são colineares. ■

5.4 O que os três casos têm em comum

Postas lado a lado, as três demonstrações revelam o mesmo esqueleto. Em cada uma delas convertemos a hipótese do teorema em ternas colineares, transformamos cada terna em uma igualdade de produto, combinamos as igualdades e lemos o resultado de volta pela recíproca. Nesse arranjo o Teorema de Menelaus funciona como um dicionário em duas direções, pois traduz colinearidade em aritmética na ida e aritmética em colinearidade na volta, e toda a demonstração se passa na aritmética.

Essa leitura tem uma consequência didática direta. O estudante que vê as três demonstrações como fatos isolados guarda três argumentos, ao passo que o estudante que vê o procedimento guarda um método e pode tentá-lo diante de um problema novo. Além disso o mesmo esquema demonstra a reta de Simson-Wallace, a reta de Gauss-Newton e a concorrência das medianas de um triângulo, resultados que não desenvolvemos aqui por economia de espaço. Gualberto (2005) e Marques (2008) reúnem demonstrações desses e de outros resultados de colinearidade e concorrência.

SciELO Preprints - Este documento é um preprint e sua situação atual está disponível em: https://doi.org/10.1590/SciELOPreprints.18977

6 Considerações para a sala de aula

Os pré-requisitos do Teorema de Menelaus são modestos, pois se resumem à razão entre segmentos, ao teorema de Tales num feixe de paralelas e ao critério ângulo-ângulo de semelhança. Todos eles estão concluídos ao final do nono ano. Dessa forma o teorema cabe na primeira série do ensino médio sem qualquer antecedência especial, e cabe no próprio nono ano em turmas que tenham trabalhado semelhança com alguma profundidade.

A sequência que decorre do que apresentamos ocupa três aulas. Na primeira os estudantes realizam a construção da Seção 3 em duplas e registram, numa tabela, os valores das três razões e do produto para cinco posições diferentes do vértice C. Observe que a tabela é o instrumento que transforma a impressão visual em constatação, pois as colunas das razões variam e a do produto não. A aula termina com a pergunta em aberto, e é importante que termine assim. Na segunda aula vem a demonstração, que agora responde a uma pergunta que a turma fez. Na terceira apresentamos a recíproca e uma aplicação, que pode ser a questão da Seção 4 ou a demonstração da concorrência das medianas.

Convém antecipar um obstáculo. Quando um dos três pontos cai no prolongamento de um lado, e não sobre ele, o estudante tende a concluir que o teorema deixou de valer. Na verdade é aí que o enunciado se revela, pois ele fala em retas suporte, e não em lados, precisamente para abranger esse caso. Temos duas condutas possíveis. A primeira é trabalhar com comprimentos não orientados e tratar a configuração em que um ponto é exterior como um segundo caso, verificado à parte. A segunda, mais econômica a longo prazo e mais exigente de imediato, é introduzir razões orientadas desde o início, com o que o teorema assume a forma única em que o produto vale -1. A escolha depende da turma. O que não convém é deixar o caso exterior sem menção, já que o próprio arrastar do GeoGebra o produz em poucos segundos.

Por fim cabe uma observação de natureza metodológica. O que apresentamos aqui é uma proposta didática fundamentada na análise do conteúdo matemático e nas possibilidades da construção dinâmica, e não o relato de uma aplicação acompanhada em sala com coleta sistemática de dados. As perguntas sugeridas na Seção 3 e a sequência descrita acima são hipóteses de trabalho, e não resultados verificados. Investigar o que de fato acontece quando a invariância é observada antes de demonstrada, isto é, se a demonstração passa a ser recebida como explicação e se essa recepção deixa marca na retenção do resultado, exige um desenho de pesquisa que este artigo não realiza e que nos parece o desdobramento natural do que foi exposto.

Declarações

Conflito de interesses. O autor declara não haver conflito de interesses.
Financiamento. A pesquisa não recebeu financiamento.
Contribuições de autoria (taxonomia CRediT). Raphael Ramon Oliveira Araujo: conceitu-

SciELO Preprints - Este documento é um preprint e sua situação atual está disponível em: https://doi.org/10.1590/SciELOPreprints.18977

ação, metodologia, investigação, redação do rascunho original, redação (revisão e edição) e visualização. O autor é o único responsável por todas as etapas do trabalho.

Disponibilidade de dados. O artigo não utiliza dados empíricos. A construção dinâmica discutida na Seção 3 pode ser reproduzida na íntegra a partir do roteiro de dez passos ali apresentado.

Aprovação ética. A pesquisa é de natureza teórica e não envolveu seres humanos ou animais. Não houve, portanto, apreciação por Comitê de Ética em Pesquisa.

Declaração de uso de Inteligência Artificial. O conteúdo matemático deste trabalho é de autoria do autor e foi desenvolvido em sua dissertação de mestrado (Araujo, 2017), a saber: o enunciado e as demonstrações do Teorema de Menelaus e de sua recíproca, a construção dinâmica no GeoGebra, a resolução da questão do Instituto Militar de Engenharia e as demonstrações dos teoremas de Desargues, de Pappus e de Pascal. Na preparação deste manuscrito foram utilizadas ferramentas de inteligência artificial (Claude, da Anthropic) na redação do texto em formato de artigo, na reconstrução das figuras em formato vetorial e na conferência numérica das construções geométricas. O autor revisou integralmente o manuscrito e é o único responsável pelo seu conteúdo.

Referências

ALVES, D. S. **Os teoremas esquecidos pelos professores de geometria plana do ensino médio**. 2015. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) — Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campo Grande, 2015.

ARAUJO, R. R. O. **Uma perspectiva do Teorema de Menelaus através do software GeoGebra**. 2017. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) — Universidade Federal do Piauí, Parnaíba, 2017.

ARAÚJO, L. C. L. **Aprendendo matemática com o GeoGebra**. São Paulo: Exato, 2010.

BARBOSA, J. L. M. **Geometria euclidiana plana**. 11. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012. (Coleção do Professor de Matemática).

CAMINHA, A. **Tópicos de matemática elementar: geometria euclidiana plana**. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

DOLCE, O.; POMPEO, J. N. **Fundamentos de matemática elementar, v. 9: geometria plana**. 17. ed. São Paulo: Atual, 1993.

GUALBERTO, K. J. **Colinearidade e concorrência na geometria plana**. 2005. Monografia (Licenciatura em Matemática) — Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2005.

LIMA, E. L. **Matemática e ensino**. 3. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2007. (Coleção do Professor de Matemática).

MARQUES, A. F. **Estudo sobre colinearidade e concorrência**. 2008. Monografia (Especialização em Matemática) — Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2008.

MARTINS, R. A. **Colinearidade e concorrência em olimpíadas internacionais de matemática**: uma reflexão voltada para o ensino da geometria plana no Brasil. 2015. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) — Universidade de Brasília, Brasília, 2015.

OLIVEIRA, M. R. **Coleção elementos de matemática, v. 2: geometria plana**. 3. ed. Fortaleza:

SciELO Preprints - Este documento é um preprint e sua situação atual está disponível em: https://doi.org/10.1590/SciELOPreprints.18977

VestSeller, 2010.

THIAGO, C. **Teorema de Ceva e teorema de Menelaus**. Rio de Janeiro: IMPA, [s.d.]. Material teórico do Programa de Iniciação Científica Júnior.

Este preprint foi submetido sob as seguintes condições:

- Os autores declaram que os necessários Termos de Consentimento Livre e Esclarecido de participantes ou pacientes na pesquisa foram obtidos e estão descritos no manuscrito, quando aplicável.
- Os autores declaram que a elaboração do manuscrito seguiu as normas éticas de comunicação científica.
- Os autores declaram que estão cientes que são os únicos responsáveis pelo conteúdo do preprint e que o depósito no SciELO Preprints não significa nenhum compromisso de parte do SciELO, exceto sua preservação e disseminação.
- Os autores declaram que os dados, aplicativos e outros conteúdos subjacentes ao manuscrito estão referenciados.
- O manuscrito depositado está no formato PDF.
- Os autores declaram que a pesquisa que deu origem ao manuscrito seguiu as boas práticas éticas e que as necessárias aprovações de comitês de ética de pesquisa, quando aplicável, estão descritas no manuscrito.
- Os autores declaram que uma vez que um manuscrito é postado no servidor SciELO Preprints, o mesmo só poderá ser retirado mediante pedido à Secretaria Editorial do SciELO Preprints, que afixará um aviso de retratação no seu lugar.
- Os autores concordam que o manuscrito aprovado será disponibilizado sob licença Creative Commons CC-BY.
- O autor submissor declara que as contribuições de todos os autores e declaração de conflito de interesses estão incluídas de maneira explícita e em seções específicas do manuscrito.
- Os autores declaram que o manuscrito não foi depositado e/ou disponibilizado previamente em outro servidor de preprints ou publicado em um periódico.
- Caso o manuscrito esteja em processo de avaliação ou sendo preparado para publicação mas ainda não publicado por um periódico, os autores declaram que receberam autorização do periódico para realizar este depósito.
- O autor submissor declara que todos os autores do manuscrito concordam com a submissão ao SciELO Preprints.