

Estado da publicação: O preprint não foi publicado em outro meio.

Oscilador com amortecimento fracionário de Caputo: memória viscoelástica e controle numérico no ensino de Física

José Humberto Prates, Victor Monteiro de Queiroz

<https://doi.org/10.1590/SciELOPreprints.18244>

Submetido em: 2026-09-30

Postado em: 2026-10-19 (versão 1)

(AAAA-MM-DD)

Oscilador com amortecimento fracionário de Caputo: memória viscoelástica e controle numérico no ensino de Física

Victor Monteiro de Queiroz ORCID: <https://orcid.org/0009-0005-1773-7804> e
José Humberto de Souza Prates ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-8471-753X>

Caputo fractionally damped oscillator:
viscoelastic memory and numerical error control in physics teaching

Resumo. Uma massa apoiada em um material viscoelástico pode apresentar pequenas oscilações e, ainda assim, levar bastante tempo para retornar ao equilíbrio. Esse comportamento motiva o estudo do oscilador com amortecimento fracionário de Caputo, no qual a força de amortecimento depende da história do movimento. Partimos de um exemplo de suporte mecânico para apresentar o modelo, explicar seus parâmetros e discutir a solução conhecida em termos da função de Mittag–Leffler bivariada. A resposta combina um transiente oscilatório com um deslocamento residual que decai segundo uma lei de potência. Para calcular essa resposta, comparamos a soma de uma série truncada com a inversão numérica de Laplace. Na grade estudada, quarenta camadas da série produzem diferença máxima de aproximadamente $6,03 \times 10^{-18}$ em relação à inversão. Apresentamos também um limite superior para o erro de truncamento em todo um intervalo, distinguindo essa garantia da concordância em pontos escolhidos. A aplicação relaciona os resultados a uma tolerância de deslocamento e serve de base para uma sequência de atividades na graduação. O artigo reúne a interpretação física, os cuidados de cálculo e o material necessário à reprodução dos resultados; as demonstrações mais extensas estão nos apêndices.

Palavras-chave: ensino de Física; oscilador fracionário; derivada de Caputo; viscoelasticidade; erro de truncamento.

Abstract. A mass supported by a viscoelastic material may show small oscillations while still taking a long time to return to equilibrium. This behavior motivates the study of an oscillator with Caputo fractional damping, whose damping force depends on the history of motion. Starting from a mechanical support example, we introduce the model, explain its parameters and discuss the known solution in terms of a bivariate Mittag–Leffler function. The response combines an oscillatory transient with a residual displacement that follows a power-law decay. We evaluate this response by comparing a truncated series with numerical Laplace inversion. On the tested grid, forty series layers yield a maximum difference of approximately 6.03×10^{-18} from the inversion result. We also present an upper bound on the truncation error over a whole interval, distinguishing this guarantee from agreement at selected points. The application relates the results to a displacement tolerance and provides the basis for undergraduate activities. The paper brings together physical interpretation, numerical checks and the material needed to reproduce the results; the longer mathematical arguments are given in the appendices.

Keywords: physics teaching; fractional oscillator; Caputo derivative; viscoelasticity; truncation error.

1 Introdução

Considere uma massa sustentada por um suporte que se deforma e tende a recuperar sua forma. Depois de deslocar a massa e soltá-la, quanto tempo é preciso esperar para que ela permaneça suficientemente próxima do equilíbrio? A pergunta parece simples, mas exige mais do que observar se as oscilações já diminuíram. Um movimento de pequena amplitude ainda pode deixar um deslocamento residual relevante para a aplicação.

Para dar uma dimensão concreta ao problema, usaremos uma massa de 1 kg, uma rigidez de 100N m^{-1} e um deslocamento inicial de 10 mm. A faixa de interesse será de $\pm 0,1$ mm em torno do equilíbrio. Esses valores definem um exemplo de cálculo, sem associação a um dispositivo medido. A pergunta que acompanhará o desenvolvimento é em que medida a previsão de retorno muda quando o suporte apresenta memória.

No oscilador amortecido usual, a força viscosa é determinada pela velocidade naquele instante. Em um elemento viscoelástico, a força pode depender também de como ele foi deformado antes. Duas histórias de movimento podem, portanto, produzir forças diferentes mesmo quando a posição e a velocidade atuais coincidem. É a essa influência do passado que nos referimos ao falar em memória.

O cálculo fracionário permite escrever essa dependência como uma integral sobre o movimento anterior. Sua aproximação com o ensino de Física já aparece nas técnicas de Laplace apresentadas por Rodrigues e de Oliveira [1], nas aplicações a circuitos de Andrade, Lima e Dartora [2] e na discussão da modelagem física feita por Prates e Moreira [3]. Mendonça e colaboradores [4] abordam a resolução numérica de equações fracionárias. Esses trabalhos oferecem caminhos para introduzir o assunto a partir de problemas conhecidos pelos estudantes.

Adotamos aqui o oscilador fracionário de Kelvin–Voigt: a massa e a mola mantêm suas descrições usuais, e a memória é introduzida no termo de amortecimento pela derivada de Caputo. A solução desse modelo em função de Mittag–Leffler bivariada já foi apresentada por Vaz Jr. e de Oliveira [5]. Nossa contribuição é organizar seu uso em uma atividade de Física Computacional que ligue a interpretação do movimento ao controle do erro de cálculo. Para isso, reunimos uma aplicação em unidades físicas, a comparação de dois procedimentos numéricos e uma cota de truncamento para a série. Esta última é desenvolvida a partir de uma majorante, sem reivindicação de prioridade matemática.

O texto foi pensado para estudantes que já conhecem equações diferenciais ordinárias, séries e transformada de Laplace. O percurso principal acompanha o problema físico e a leitura dos resultados. Quem desejar examinar a dedução da solução, as provas de convergência e os limites do modelo encontrará esses desenvolvimentos nos apêndices.

2 Como a memória entra na equação de movimento

2.1 Massa, mola e elemento viscoelástico

Representamos o suporte por uma mola em paralelo com um elemento viscoelástico fracionário. Os dois sofrem o mesmo deslocamento, e suas forças se somam. Medindo x a partir da posição de equilíbrio e considerando o movimento livre, a segunda lei de Newton fornece

$$m\ddot{x} + c_{\alpha} {}^C D_{0+}^{\alpha} x + kx = 0, \quad x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = v_0, \quad (1)$$

O primeiro termo representa a inércia; o último, a força da mola. A diferença em relação ao modelo viscoso está no termo intermediário, que reúne a influência das velocidades anteriores. Adotamos

$m > 0$, $k > 0$, $c_\alpha \geq 0$ e $0 < \alpha < 1$. Os dados x_0 e v_0 indicam a posição e a velocidade no instante de liberação.

A derivada de Caputo usada nessa equação é definida por

$${}^C D_{0+}^\alpha x(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{-\alpha} \dot{x}(\tau) d\tau. \quad (2)$$

Na integral, τ percorre os instantes anteriores ao tempo t . Cada velocidade $\dot{x}(\tau)$ recebe um peso $(t-\tau)^{-\alpha}$, que diminui com a distância ao instante atual. A ordem α modifica essa ponderação. A função gama, Γ , aparece como fator de normalização; para um inteiro não negativo n , vale $\Gamma(n+1) = n!$. Sua definição e as propriedades usadas nas contas estão no apêndice A.

O peso cresce sem limite quando τ se aproxima de t , mas sua integral é finita para $0 < \alpha < 1$. Podemos, por exemplo, trabalhar com trajetórias absolutamente contínuas para as quais a integral exista. Essa condição dá sentido à soma ponderada do histórico. Uma posição constante tem derivada de Caputo nula, porque todas as velocidades que entram na integral são nulas.

O limite inferior 0 também merece atenção. Ele significa que a memória de velocidade é inicializada no começo do movimento estudado. Essa é a preparação idealizada adotada no exemplo do suporte. Se o material tiver sido deformado de modo variável antes da liberação, será necessário incorporar essa história ao modelo. Em uma montagem vertical, o peso pode ser retirado da equação por uma mudança da origem, $x = y - mg/k$, pois a derivada de Caputo de uma constante é zero.

2.2 As unidades do coeficiente e as escalas do problema

Antes de comparar curvas para ordens diferentes, precisamos definir o que será mantido fixo. Dividindo a equação (1) pela massa e escrevendo $\lambda_\alpha = c_\alpha/m$ e $\omega_0^2 = k/m$, obtemos

$$\ddot{x} + \lambda_\alpha {}^C D_{0+}^\alpha x + \omega_0^2 x = 0, \quad [c_\alpha] = MT^{\alpha-2}, \quad [\lambda_\alpha] = T^{\alpha-2}. \quad (3)$$

Aqui, M e T representam as dimensões de massa e tempo. Como a ordem da derivada muda, mudam também as unidades de c_α . Para $\alpha = 1$, recupera-se a unidade do coeficiente viscoso; para $\alpha = 1/2$, a unidade é $\text{kg s}^{-3/2}$. Por isso, atribuir o mesmo número a c_α em todas as ordens não basta para definir uma comparação física.

Uma maneira de organizar a comparação é introduzir uma escala de tempo fixa τ_0 e escrever $c_\alpha = c \tau_0^{\alpha-1}$, com $[c] = MT^{-1}$. Para os cálculos, é conveniente expressar o tempo em unidades de $1/\omega_0$ e a posição em unidades de um comprimento L :

$$\theta = \omega_0 t, \quad u = \frac{x}{L}, \quad \eta = \lambda_\alpha \omega_0^{\alpha-2}, \quad v_0^* = \frac{v_0}{L\omega_0}. \quad (4)$$

O resultado é a equação sem unidades

$$u'' + \eta {}^C D_{0+}^\alpha u + u = 0, \quad u(0) = u_0 = \frac{x_0}{L}, \quad u'(0) = v_0^*. \quad (5)$$

As primas indicam derivadas em relação a θ . O parâmetro η permite comparar a intensidade do termo de memória com a inércia e a força elástica na escala escolhida. Ele será mantido igual a 0,5 nas comparações principais.

Para o suporte da introdução, $L = 10\text{ mm}$ e $\omega_0 = 10\text{ s}^{-1}$. Assim, $u = 1$ corresponde a 10 mm e $\theta = 10$ corresponde a 1 s. A escolha de η fixo equivale, nessa aplicação, a usar $\tau_0 = 1/\omega_0$ e $c = \eta m \omega_0$. Essa convenção define a família de modelos que será comparada; ela não pressupõe que materiais diferentes dissipem a mesma energia em todas as frequências.

3 Da equação à posição da massa

3.1 Uma solução que pode ser calculada de duas maneiras

A transformada de Laplace converte a equação de movimento em uma expressão algébrica. Escrevendo $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}$, o termo de inércia se transforma em $\mathcal{L}\{\ddot{x}\} = s^2X - sx_0 - v_0$. No caso de Caputo, a posição inicial também aparece explicitamente: $\mathcal{L}\{{}^C D^\alpha x\} = s^\alpha X - s^{\alpha-1}x_0$. Substituindo essas expressões na equação (3) e isolando $X(s)$, encontramos

$$X(s) = \frac{x_0s + v_0 + \lambda_\alpha x_0 s^{\alpha-1}}{s^2 + \lambda_\alpha s^\alpha + \omega_0^2}. \quad (6)$$

A posição procurada é a transformada inversa de $X(s)$. O termo que contém $x_0 s^{\alpha-1}$ vem da memória inicial definida no problema e precisa ser conservado. Sem ele, a expressão descreveria outro movimento. Nas potências complexas, adotamos o ramo principal, com corte no eixo real negativo.

Há duas rotas para avaliar essa solução. Podemos expandir a expressão em uma série de potências e calcular uma soma finita, ou efetuar diretamente a inversão numérica de Laplace. A primeira rota é útil para acompanhar a dedução e controlar os termos descartados. A segunda oferece uma comparação calculada por um procedimento diferente. Os cuidados numéricos em problemas fracionários são discutidos por Garrappa [6]; para a inversão, usamos o método de de Hoog, Knight e Stokes [7].

3.2 O papel da função de Mittag–Leffler

A solução clássica é escrita com exponenciais, senos e cossenos. Para o modelo com memória, uma função apropriada para reunir os termos da solução é a Mittag–Leffler bivariada. O nome designa a seguinte série de duas variáveis:

$$E_{(\mu, \nu), \beta}(z, w) = \sum_{p, q \geq 0} \binom{p+q}{p} \frac{z^p w^q}{\Gamma(\beta + \mu p + \nu q)}. \quad (7)$$

Os índices p e q são inteiros não negativos. Eles contam as potências das duas variáveis, z e w , enquanto o coeficiente binomial registra as maneiras de combinar essas potências. Para o nosso oscilador, usamos $a = 2 - \alpha$, $z = -\lambda_\alpha t^a$ e $w = -\omega_0^2 t^2$. A posição pode então ser escrita na forma

$$x(t) = x_0 \left[1 - \omega_0^2 t^2 E_{(a, 2), 3}(z, w) \right] + v_0 t E_{(a, 2), 2}(z, w). \quad (8)$$

A primeira parcela acompanha o efeito do deslocamento inicial; a segunda acompanha o efeito da velocidade inicial. No exemplo de liberação a partir do repouso, $v_0 = 0$, e só a primeira parcela permanece. Quando $t = 0$, os fatores t^2 e t permitem reconhecer os dados iniciais. Os passos que levam da equação (6) a essa forma compacta estão no apêndice A.

Em variáveis sem unidades, a expressão usada pela inversão numérica é

$$U(s) = \frac{u_0 s + v_0^* + \eta u_0 s^{\alpha-1}}{s^2 + \eta s^\alpha + 1}. \quad (9)$$

Ela será a referência de comparação para as somas truncadas. As duas rotas resolvem o mesmo modelo; sua concordância testa a avaliação computacional. A comparação com um suporte real exigiria, além disso, medições e determinação dos parâmetros do material.

4 O movimento previsto pelo modelo

4.1 Oscilações iniciais e retorno lento

Começamos pela liberação a partir do repouso, com $u_0 = 1$, $v_0^* = 0$ e $\eta = 0,5$. A figura 1 mostra a posição para algumas ordens fracionárias e para o caso clássico, $\alpha = 1$. O tempo está em unidades de $1/\omega_0$, e a posição, em unidades do deslocamento inicial.

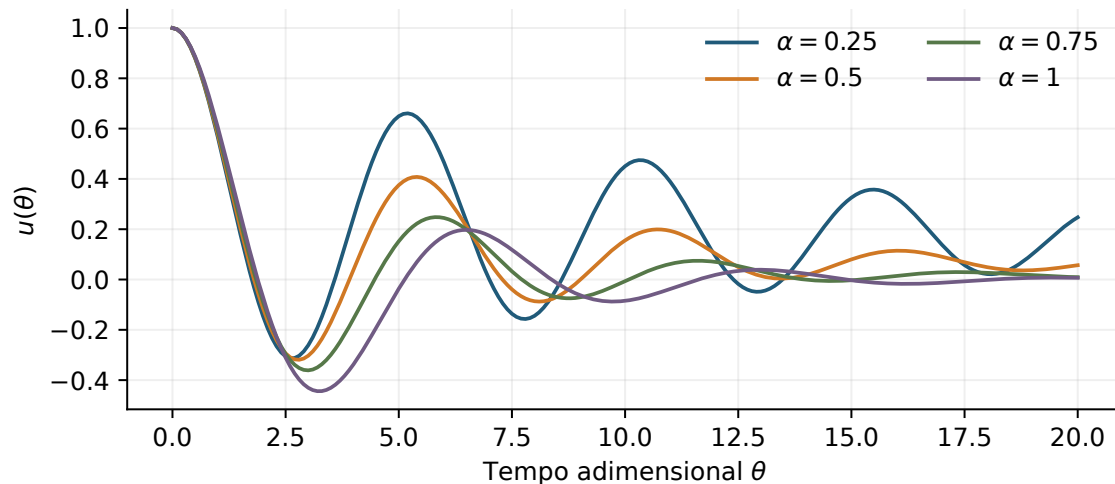


Figura 1: Resposta adimensional com $\eta = 0,5$, $u_0 = 1$ e $v_0^* = 0$. Utilizam-se 201 instantes em $[0, 20]$ e 30 dígitos na inversão. Para $\alpha = 1$, usa-se a solução clássica.

Na janela apresentada, as ordens menores mantêm oscilações mais pronunciadas. Essa leitura vale para os parâmetros fixados na figura. Ao mudar a ordem, o peso atribuído ao histórico também muda; por isso, a comparação entre dois modelos deve sempre informar qual coeficiente, intervalo de tempo e característica do movimento estão sendo considerados.

Depois que o transiente oscilatório diminui, a memória ainda pode deixar um pequeno deslocamento. Para $x_0 \neq 0$, $\lambda_\alpha > 0$ e $\omega_0 > 0$, o comportamento em tempos longos é

$$x(t) \sim \frac{\lambda_\alpha x_0}{\omega_0^2 \Gamma(1 - \alpha)} t^{-\alpha} \quad (t \rightarrow \infty). \quad (10)$$

O símbolo $\sim$ indica que a razão entre a solução e a expressão à direita tende a um quando t cresce. Essa expressão é chamada de cauda algébrica: o deslocamento diminui como uma potência do tempo. Por exemplo, para $\alpha = 1/2$, multiplicar o tempo por quatro reduz pela metade o valor previsto pela cauda. Esse decaimento acaba sendo mais lento do que o exponencial do modelo viscoso.

Em variáveis sem unidades, para $u_0 = 1$, a aproximação fica $u_{\text{ass}} = \eta \theta^{-\alpha} / \Gamma(1 - \alpha)$. A figura 2 permite ver em que parte da trajetória ela se aproxima da solução completa.

A curva ainda oscila no começo do intervalo, enquanto a aproximação por potência decresce suavemente. Para quantificar a diferença, usamos $e_{\text{rel}} = |u_{\text{inv}} - u_{\text{ass}}| / |u_{\text{inv}}|$. Em $\theta = 10$, 100 e 1000, os valores são aproximadamente $4,26 \times 10^{-1}$, $1,40 \times 10^{-3}$ e $1,26 \times 10^{-4}$, respectivamente. A aproximação, portanto, melhora à medida que o transiente perde importância. A justificativa matemática da cauda e sua dependência das condições iniciais são discutidas no apêndice D.

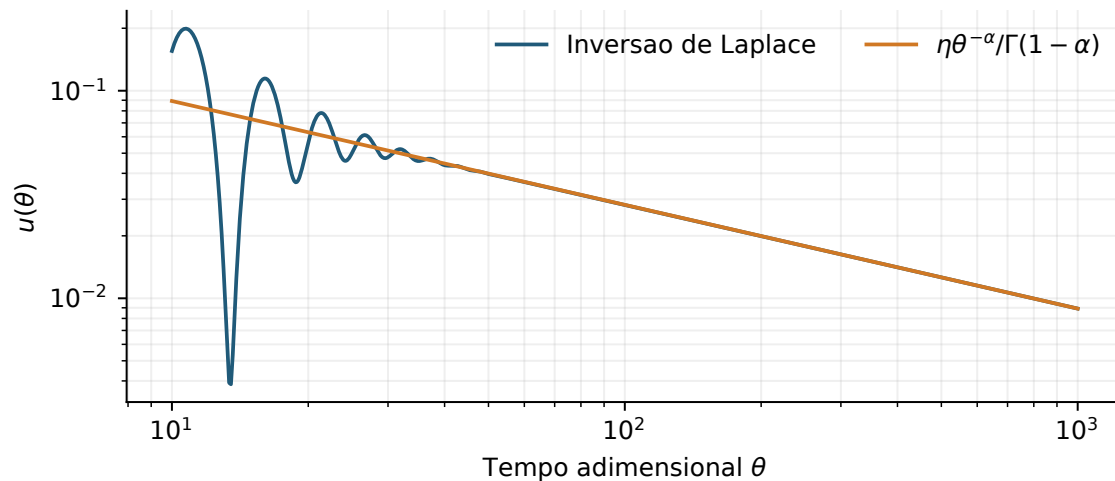


Figura 2: Inversão de Laplace e assíntota $u_{\text{ass}} = \eta \theta^{-\alpha} / \Gamma(1 - \alpha)$ para $\alpha = 0,5$. Mantêm-se $\eta = 0,5$, $u_0 = 1$ e $v_0^* = 0$. São usados 385 pontos, com resolução maior no transiente.

4.2 Retomando o exemplo do suporte

No suporte com massa de 1 kg e rigidez de 100 N m^{-1} , queremos acompanhar a liberação de $x_0 = 10 \text{ mm}$ até a faixa de $\pm 0,1 \text{ mm}$. Isso equivale a $|u| \leq 0,01$. A comparação será feita entre $\alpha = 0,5$ e $\alpha = 1$, mantendo $\eta = 0,5$ e a memória inicial de velocidade nula.

Com as escalas já definidas, os coeficientes são $c_{1/2} \simeq 15,811 \text{ kg s}^{-3/2}$ e $c_1 = 5 \text{ kg s}^{-1}$. Ambos seguem a família $c_\alpha = c_1 \tau_0^{\alpha-1}$, com $\tau_0 = 0,1 \text{ s}$. A tabela 1 apresenta alguns deslocamentos calculados em milímetros.

Tabela 1: Deslocamentos do exemplo sintético, calculados com 80 dígitos e arredondados para apresentação. O sinal indica o lado do equilíbrio.

$t \text{ (s)}$	$x, \alpha = 0,5 \text{ (mm)}$	$x, \alpha = 1 \text{ (mm)}$
1	1,55427	-0,84776
2	0,56855	0,06720
10	0,28170	$-9,81 \times 10^{-11}$
100	0,08919	$2,56 \times 10^{-108}$

Em $t = 2 \text{ s}$, por exemplo, o deslocamento fracionário ainda é de cerca de 0,57 mm, acima da tolerância escolhida. No modelo clássico, ele já é de cerca de 0,067 mm. Mas uma observação isolada dentro da faixa não estabelece o tempo de acomodação: a massa pode atravessar o equilíbrio e voltar a se afastar. Precisamos examinar sua permanência posterior na faixa.

Para o caso clássico, há uma forma direta de obter essa garantia. Com $g = \eta/2 < 1$, a solução para $u_0 = 1$ e $v_0^* = 0$ fica limitada pela envoltória

$$|u(\theta)| \leq \frac{e^{-g\theta}}{\sqrt{1-g^2}}. \quad (11)$$

A envoltória é uma curva que limita o módulo do deslocamento. Quando ela cai abaixo da tolerância ε , toda a oscilação posterior também fica abaixo desse valor.

Isolando o tempo nessa desigualdade, obtemos

$$t_{\text{env}} = \frac{1}{g\omega_0} \log \left(\frac{1}{\varepsilon \sqrt{1-g^2}} \right). \quad (12)$$

Com $\varepsilon = 0,01$, encontramos $t_{\text{env}} \simeq 1,86\text{s}$. Esse é um tempo suficiente para a acomodação; a última passagem pela borda da faixa pode ocorrer antes dele.

Para o modelo fracionário, igualamos a aproximação de tempo longo à mesma tolerância. Isso fornece a estimativa

$$t_{\text{ass}} = \frac{1}{\omega_0} \left[\frac{\eta}{\varepsilon \Gamma(1-\alpha)} \right]^{1/\alpha}. \quad (13)$$

O resultado é $t_{\text{ass}} \simeq 79,6\text{s}$ para $\alpha = 0,5$. A inversão de Laplace nesse instante dá $u \simeq 0,009998$, próximo de $0,01$. Como a conta usa uma aproximação assintótica, esse tempo indica a escala de retorno e não constitui, sozinho, uma prova de permanência futura na faixa.

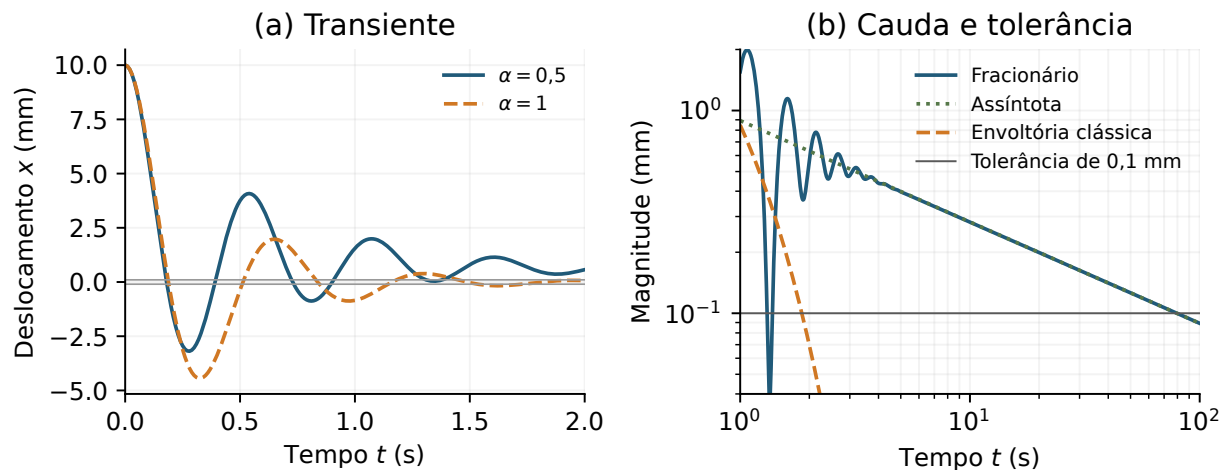


Figura 3: Aplicação em unidades físicas. (a) Comparação no transiente. As linhas horizontais indicam $\pm 0,1$ mm. (b) Cauda fracionária positiva, assíntota e envoltória clássica, comparadas à tolerância de $0,1$ mm. A envoltória fornece uma cota; a assíntota fornece uma aproximação.

A figura 3 reúne as duas escalas de observação. No transiente, vemos as oscilações; no tempo longo, a cauda fracionária se torna decisiva para a tolerância. O exemplo mostra por que uma oscilação aparentemente pequena pode não ser suficiente para considerar o suporte acomodado. Para aplicar a conclusão a um material real, seria necessário verificar a linearidade da resposta, controlar a preparação do suporte e ajustar os parâmetros a dados experimentais.

5 Cuidados na avaliação numérica

5.1 Quantos termos são necessários?

Uma fórmula exata pode produzir um resultado ruim quando calculada com poucos termos. No presente problema, esse cuidado é especialmente relevante: parcelas de grande módulo e sinais opostos podem quase se cancelar. A diferença que resta precisa ser calculada com precisão suficiente para representar o movimento.

Na série da equação (7), agrupamos os termos em camadas $p + q = n$ e conservamos as camadas de $n = 0$ até $n = N$. Esse corte triangular contém $(N + 1)(N + 2)/2$ parcelas. Para verificar sua influência, usamos $\eta = 0,5$, $u_0 = 1$, $v_0^* = 0$, as ordens $\alpha \in \{0,25; 0,50; 0,75; 0,95\}$ e os tempos $\theta \in \{0,1; 0,5; 1; 2; 5; 10\}$. A tabela 2 apresenta a maior diferença absoluta $e_N = \max |u_N - u_{\text{inv}}|$ nesses 24 pares.

Tabela 2: Maior diferença absoluta na grade de 24 pares. Em todas as linhas e precisões, o maior desvio ocorre em $\alpha = 0,95$, $\theta = 10$.

N	Termos	50 dígitos	80 dígitos
10	66	$2,72 \times 10^3$	$2,72 \times 10^3$
20	231	$6,16 \times 10^{-2}$	$6,16 \times 10^{-2}$
40	861	$6,03 \times 10^{-18}$	$6,03 \times 10^{-18}$
80	3321	$3,14 \times 10^{-46}$	$4,67 \times 10^{-63}$

Com $N = 10$, o desvio chega a ser milhares de vezes maior do que o deslocamento inicial unitário. Esse resultado vem de um corte insuficiente da série. Ao passar para $N = 40$, a diferença cai para cerca de $6,03 \times 10^{-18}$ na mesma grade. Os parâmetros do oscilador permaneceram iguais: foi a aproximação numérica que melhorou.

Repetimos as somas com 50 e 80 dígitos decimais de trabalho, acumulando as parcelas por meio de `mp.fsum`. Para $N = 80$, a mudança de precisão altera o desvio observado e revela a influência do arredondamento. Configurar 80 dígitos permite trabalhar com mais algarismos durante as operações; a quantidade de algarismos corretos no resultado depende também do algoritmo, do truncamento e dos cancelamentos.

Os cálculos foram executados em Python 3.12.14, com `mpmath 1.4.1` e `matplotlib 3.10.8`. Na inversão de Laplace, usamos `mp.invertlaplace(..., method='dehoog')`. Os programas, as malhas e os dados que deram origem às tabelas e figuras acompanham o artigo, com instruções de execução no apêndice G.

5.2 Conferências com casos conhecidos

Antes de interpretar uma curva fracionária, convém verificar se o programa recupera movimentos cuja solução já conhecemos. A tabela 3 reúne essa conferência para os regimes subamortecido, crítico e superamortecido, além do caso sem amortecimento. As expressões usadas estão no apêndice D.

Tabela 3: Controles da implementação. Exceto na última linha, utilizam-se 80 dígitos. Os números medem concordância computacional, sem interpretação como incerteza física.

Comparação	Maior diferença
Clássico: $\eta = 0,5$	$1,05 \times 10^{-81}$
Clássico: $\eta = 2$	$1,12 \times 10^{-81}$
Clássico: $\eta = 3$	$1,89 \times 10^{-81}$
Sem amortecimento: $\eta = 0$	$1,43 \times 10^{-81}$
Velocidade inicial: série $N = 80$ e inversão	$2,58 \times 10^{-75}$
Inversão: 50 e 80 dígitos, grade principal	$8,74 \times 10^{-51}$

Os controles clássicos usam $\alpha = 1$, os mesmos seis instantes da grade principal e $\eta = 0,5, 2$ e 3 . Para $\eta = 0$, a referência é $\cos \theta$. Também verificamos a parcela de velocidade inicial, escolhendo $u_0 = 0, v_0^* = 1, \alpha \in \{0,25; 0,50; 0,75\}$ e $\theta \in \{0,5; 2; 10\}$. Nesses nove pares, a série com $N = 80$ é comparada à inversão.

A última linha da tabela mostra a estabilidade da inversão quando a precisão passa de 50 para 80 dígitos na grade principal. Essas verificações oferecem evidências de consistência do cálculo. Para atribuir um limite rigoroso ao erro total da inversão, seria necessário um procedimento de certificação adicional.

5.3 Um limite para o erro em todo o intervalo

Uma tabela compara um número finito de instantes. Se queremos controlar o truncamento entre eles, precisamos de uma estimativa que valha para qualquer ponto do intervalo. Para a liberação a partir do repouso, com $u_0 = 1$ e $v_0^* = 0$, podemos obter essa estimativa diretamente da série.

Considere $0 \leq \theta \leq \Theta$, $a = 2 - \alpha$ e $A = \eta \Theta^a + \Theta^2$. A quantidade A reúne os maiores módulos que as duas variáveis da função bivariada podem assumir no intervalo. Definimos

$$b_n = \frac{A^n}{\Gamma(3 + an)}, \quad q_n = \frac{b_{n+1}}{b_n} = A \frac{\Gamma(3 + an)}{\Gamma(3 + a(n+1))}. \quad (14)$$

Os números b_n limitam a contribuição de cada camada, e q_n compara duas camadas consecutivas dessa estimativa. Quando $q_{N+1} < 1$, o restante da série pode ser limitado por uma soma geométrica. O resultado é

$$\sup_{0 \leq \theta \leq \Theta} |u - u_N| \leq B_N = \frac{\Theta^2 b_{N+1}}{1 - q_{N+1}}. \quad (15)$$

Assim, basta escolher um corte que satisfaça $B_N \leq \varepsilon$ para garantir uma tolerância ε de truncamento em todo o intervalo. A demonstração está no apêndice C. A tabela 4 mostra os cortes obtidos para $\Theta = 10$ e $\varepsilon = 10^{-8}$.

Tabela 4: Menor corte que satisfaz o critério suficiente $B_N \leq 10^{-8}$ para $\eta = 0,5$, $\Theta = 10$, $u_0 = 1$ e $v_0^* = 0$. A minimalidade refere-se ao critério, não ao erro efetivo.

α	N suficiente	Termos	B_N
0,25	31	528	$1,31 \times 10^{-9}$
0,50	50	1326	$2,12 \times 10^{-9}$
0,75	100	5151	$5,59 \times 10^{-9}$
0,95	227	26106	$4,31 \times 10^{-9}$

À primeira vista, pode parecer estranho que a cota exija tantos termos quando a tabela 2 já mostra uma diferença pequena com $N = 40$. A explicação está na construção da estimativa: ela soma os módulos das parcelas e substitui as potências do tempo por seus máximos. Com isso, perde os cancelamentos que ajudam a soma original e cobre também os instantes que não foram amostrados. O critério fornece um corte suficiente, que pode ser maior do que o necessário na prática.

A desigualdade (15) controla os termos descartados da soma exata. O arredondamento exige atenção separada, sobretudo quando aumentar N introduz parcelas grandes que quase se cancelam. No programa, calculamos primeiro $\log b_n$ e $\log q_n$ para evitar estouro na avaliação da função gama. Os valores de B_N apresentados são aproximações numéricas da cota analítica; não foi empregada aritmética intervalar.

6 Uma sequência para a sala de aula

O exemplo pode ser trabalhado em três encontros de aproximadamente duas horas, com tarefas computacionais entre eles. Essa duração é uma sugestão de organização. Os arquivos de dados permitem que a turma comece pela interpretação dos resultados, mesmo quando não há tempo para executar todas as inversões. A dedução completa pode ser reservada aos estudantes que já dominam a transformada de Laplace.

No primeiro encontro, a pergunta inicial é a do suporte: o que significa dizer que a massa voltou ao equilíbrio? Convém discutir a diferença entre atravessar $x = 0$ e permanecer em uma faixa de tolerância antes de apresentar a memória. Em seguida, os estudantes comparam a força viscosa $c\dot{x}(t)$ com a integral da equação (2), deduzem as unidades de c_α e explicam o papel da preparação inicial. Ao final, devem conseguir descrever por que a mesma velocidade atual pode estar associada a forças diferentes quando as histórias de movimento são diferentes.

No segundo encontro, a turma deduz a transformada (6) e confere os dados iniciais na solução compacta. A investigação numérica pode começar por um único par, $\alpha = 0,95$ e $\theta = 10$, variando o corte entre $N = 10, 20$ e 40 . Uma tabela curta, acompanhada de uma explicação, deve mostrar que o resultado excessivamente grande no primeiro corte não caracteriza uma instabilidade física. A repetição com 50 e 80 dígitos permite discutir a diferença entre descartar termos e arredondar operações.

O terceiro encontro liga o cálculo à pergunta inicial. Os estudantes usam a cota (15) para escolher um corte em $[0, 10]$, comparam esse critério com a concordância na grade e convertem o movimento para segundos e milímetros. A discussão dos valores $1,86\text{s}$ e $79,6\text{s}$ deve explicitar como cada um foi obtido: o primeiro vem de uma envoltória que limita toda a oscilação futura; o segundo, de uma aproximação para tempos longos. O relatório final pode responder à pergunta do suporte e indicar que medições seriam necessárias para confrontar essa previsão com um experimento.

Na avaliação, sugerimos observar quatro aspectos com o mesmo peso: a interpretação da memória e das unidades; a dedução e a recuperação dos casos clássicos; o registro dos cortes e das precisões utilizados; e a interpretação física dos resultados. Algumas perguntas ajudam a perceber dificuldades: ao mudar α , o que foi mantido fixo? Uma concordância de 10^{-18} em pontos escolhidos vale automaticamente entre eles? Estar dentro da faixa em um instante garante acomodação? Que evidência permitiria escolher entre os modelos em um suporte real? As respostas devem recorrer aos cálculos e às hipóteses apresentados, com espaço para o estudante explicar o raciocínio em suas próprias palavras.

Como extensão, é possível estudar a liberação com velocidade inicial e $u_0 = 0$, que altera o expoente da cauda, ou reduzir a tolerância e explorar $t_{\text{ass}} \propto \varepsilon^{-1/\alpha}$. Outra possibilidade é comparar a inversão de Laplace com um método que discretize a memória no tempo, tomando os trabalhos [4, 6] como referência. A escolha depende dos conhecimentos da turma e do tempo disponível.

7 Conclusões

O estudo partiu de uma pergunta física simples: quanto tempo um suporte leva para retornar a uma faixa próxima do equilíbrio? No modelo com memória, a diminuição das oscilações não encerra o movimento relevante para essa pergunta. A cauda algébrica mantém um deslocamento residual que pode determinar a escala de retorno, como ocorreu no exemplo com tolerância de $0,1\text{ mm}$.

Para interpretar esse resultado, é preciso calcular a solução com cuidado. A comparação entre a série e a inversão de Laplace mostra o efeito de um corte insuficiente, enquanto os testes de precisão revelam a participação do arredondamento. A cota desenvolvida permite escolher um

corte suficiente para todo um intervalo e dá conteúdo concreto à diferença entre uma verificação em pontos e um controle uniforme.

Ao reunir esses elementos, o artigo oferece um percurso de estudo em que modelo, cálculo e interpretação podem ser examinados juntos. Os resultados apresentados são teóricos e computacionais: a aplicação usa parâmetros escolhidos para o exemplo, e a sequência de ensino ainda não foi avaliada com estudantes. A comparação com dados de um suporte e a aplicação em sala de aula são os próximos passos para examinar, respectivamente, a adequação física do modelo e a utilidade pedagógica da proposta.

Disponibilidade dos dados e códigos

Os programas e os dados usados nas tabelas e figuras são fornecidos como material suplementar no arquivo `material_suplementar.zip`, nas pastas `codigo/` e `dados/`. As instruções de execução estão no apêndice G. Os dados foram produzidos pelos cálculos descritos no artigo e não correspondem a medições experimentais.

Referências

- [1] F.G. Rodrigues e E.C. de Oliveira, Introdução às técnicas do cálculo fracionário para estudar modelos da física matemática, *Revista Brasileira de Ensino de Física* **37**, 3305 (2015). DOI: 10.1590/S1806-11173731842.
- [2] A.M.F. de Andrade, E.G. de Lima e C.A. Dartora, Uma introdução ao cálculo fracionário e suas aplicações em circuitos elétricos, *Revista Brasileira de Ensino de Física* **40**, e3314 (2018). DOI: 10.1590/1806-9126-RBEF-2018-0011.
- [3] J.H. de Souza Prates e D.M. Moreira, Um sentido físico para modelagem fracionária: O caso do amortecimento das ondas eletromagnéticas, *Revista Brasileira de Ensino de Física* **42**, e20200363 (2020). DOI: 10.1590/1806-9126-RBEF-2020-0363.
- [4] A.K.F. Mendonça, T.S. Evangelista, V.C. Rispoli e R.G.G. Amorim, Resolvendo numericamente equações diferenciais fracionárias, *Revista Brasileira de Ensino de Física* **44**, e20210426 (2022). DOI: 10.1590/1806-9126-RBEF-2021-0426.
- [5] J. Vaz Jr. e E. Capelas de Oliveira, On the fractional Kelvin-Voigt oscillator, *Mathematics in Engineering* **4**, 1–23 (2022). DOI: 10.3934/mine.2022006.
- [6] R. Garrappa, Numerical Solution of Fractional Differential Equations: A Survey and a Software Tutorial, *Mathematics* **6**, 16 (2018). DOI: 10.3390/math6020016.
- [7] F.R. de Hoog, J.H. Knight e A.N. Stokes, An Improved Method for Numerical Inversion of Laplace Transforms, *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing* **3**, 357–366 (1982). DOI: 10.1137/0903022.

A Dedução da solução

Reunimos aqui os passos entre a transformada de Laplace e a forma compacta usada no texto. As funções gama e beta permitem manipular a integral de Caputo:

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty r^{z-1} e^{-r} dr, \quad B(p, q) = \int_0^1 r^{p-1} (1-r)^{q-1} dr = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}, \quad (16)$$

As expressões valem para argumentos reais positivos. Aplicando a definição de Caputo a t^β , com $\beta > 0$, e fazendo $\tau = tr$, a integral assume a forma $\beta t^{\beta-\alpha} B(\beta, 1-\alpha)/\Gamma(1-\alpha)$. A relação entre beta e gama, juntamente com $\beta\Gamma(\beta) = \Gamma(\beta+1)$, fornece

$${}_C D_{0+}^\alpha t^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-\alpha)} t^{\beta-\alpha}. \quad (17)$$

Para uma constante, o resultado deve ser calculado diretamente pela definição e é zero. A substituição formal de $\beta = 0$ na equação (17) não representa esse caso.

Para expandir a equação (6), tomamos $a = 2 - \alpha \in (1, 2)$. Quando s tem módulo suficientemente grande no semiplano direito, a expansão geométrica do denominador, seguida da fórmula binomial, fornece

$$\frac{1}{1 + \lambda_\alpha s^{-a} + \omega_0^2 s^{-2}} = \sum_{p,q \geq 0} V_{pq} s^{-ap-2q}, \quad V_{pq} = (-1)^{p+q} \binom{p+q}{p} \lambda_\alpha^p \omega_0^{2q}. \quad (18)$$

A transformada inversa de $s^{-\rho}$ é $t^{\rho-1}/\Gamma(\rho)$, para $\rho > 0$. Aplicando essa relação às três parcelas do numerador de $X(s)$, encontramos

$$\begin{aligned} x(t) = & x_0 \sum_{p,q \geq 0} \frac{V_{pq} t^{ap+2q}}{\Gamma(1+ap+2q)} + v_0 \sum_{p,q \geq 0} \frac{V_{pq} t^{1+ap+2q}}{\Gamma(2+ap+2q)} \\ & + \lambda_\alpha x_0 \sum_{p,q \geq 0} \frac{V_{pq} t^{a+ap+2q}}{\Gamma(1+a+ap+2q)}. \end{aligned} \quad (19)$$

Com $z = -\lambda_\alpha t^a$ e $w = -\omega_0^2 t^2$, a definição (7) permite reunir as três somas:

$$x(t) = x_0 E_{(a,2),1}(z, w) + v_0 t E_{(a,2),2}(z, w) + \lambda_\alpha x_0 t^a E_{(a,2),1+a}(z, w). \quad (20)$$

A identidade binomial também implica a relação

$$E_{(\mu,\nu),\beta}(z, w) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} + z E_{(\mu,\nu),\beta+\mu}(z, w) + w E_{(\mu,\nu),\beta+\nu}(z, w). \quad (21)$$

Usando-a com $\mu = a$, $\nu = 2$ e $\beta = 1$, as duas parcelas proporcionais a x_0 se combinam e levam à equação (8). Essa redução evita avaliar separadamente termos que se cancelariam pela identidade, embora ainda existam cancelamentos dentro das somas. As representações retomam a solução discutida em [5].

B Convergência e inversão da série

Para justificar as operações anteriores, agrupamos a série bivariada por camadas $p+q = n$. Com $a \in (1, 2)$ e $\beta \geq 1$, vale

$$\sum_{p+q=n} \binom{n}{p} \frac{|z|^p |w|^q}{\Gamma(\beta+ap+2q)} \leq \frac{(|z|+|w|)^n}{\Gamma(\beta+an)}. \quad (22)$$

De fato, $ap + 2q \geq a(p + q) = an$. Para $n \geq 1$, todos os argumentos da função gama são pelo menos $\beta + an > 2$, região em que essa função é crescente. Para $n = 0$, os dois lados são iguais. A soma das potências do numerador é $(|z| + |w|)^n$, pela fórmula binomial.

A série formada pelo lado direito converge para quaisquer z, w finitos. Ela também limita uniformemente a série original em conjuntos compactos. Seguem daí a convergência absoluta e uniforme nesses conjuntos e a possibilidade de reagrupar as parcelas por camadas.

A expansão geométrica em s é usada em um semiplano de convergência; isso não restringe a solução a tempos pequenos. Para transformar a série termo a termo, escolhamos $\sigma > 0$ de modo que $r = \lambda_\alpha \sigma^{-a} + \omega_0^2 \sigma^{-2} < 1$. A soma das integrais dos módulos dos termos de $t^{\beta-1} E_{(a,2),\beta}$, com peso $e^{-\sigma t}$, é $\sigma^{-\beta} \sum_{n \geq 0} r^n$, que é finita. Podemos, portanto, trocar a soma pela integral de Laplace nesse semiplano. A unicidade da transformada identifica a solução para $t \geq 0$.

Uma segunda dedução pode ser feita por uma equação integral. Seja $y = x - x_0$ e seja I^ρ a integral fracionária de Riemann–Liouville, definida por $I^\rho f(t) = \Gamma(\rho)^{-1} \int_0^t (t - \tau)^{\rho-1} f(\tau) d\tau$, para $\rho > 0$. Integrando duas vezes a equação de movimento, obtemos

$$y = v_0 t - \frac{\omega_0^2 x_0 t^2}{2} - \lambda_\alpha I^{2-\alpha} y - \omega_0^2 I^2 y. \quad (23)$$

A iteração dessa equação e a propriedade $I^\mu I^\nu = I^{\mu+\nu}$ reproduzem a série. Nessa forma, a posição é escrita diretamente em termos de uma integral da história anterior.

C Demonstração da cota de truncamento

Para $u_0 = 1$ e $v_0^* = 0$, truncamos a forma compacta em $p + q \leq N$. Aplicando a majorante (22) às camadas descartadas, em $0 \leq \theta \leq \Theta$, encontramos

$$|u(\theta) - u_N(\theta)| \leq \Theta^2 \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{A^n}{\Gamma(3 + an)}, \quad A = \eta \Theta^a + \Theta^2. \quad (24)$$

Com os números b_n e q_n definidos na equação (14), o lado direito é $\Theta^2 \sum_{n=N+1}^{\infty} b_n$. A convexidade de $\log \Gamma$ implica que $\Gamma(x + a)/\Gamma(x)$ cresce com $x > 0$. Logo, q_n decresce com n .

Se $q_{N+1} < 1$, cada razão posterior também é menor do que esse valor. Segue que $b_{N+1+j} \leq b_{N+1} q_{N+1}^j$ para $j \geq 0$. Somando a progressão geométrica e multiplicando por Θ^2 , obtemos a cota (15). A demonstração vale para a soma exata e não incorpora o erro de arredondamento de sua avaliação computacional.

D Limites do modelo e comportamento em tempos longos

D.1 O começo do movimento

Para uma ordem fixa $0 < \alpha < 1$, a expansão da solução compacta perto de $t = 0$ é

$$x(t) = x_0 + v_0 t - \frac{\omega_0^2 x_0 t^2}{2} - \frac{\lambda_\alpha v_0 t^{3-\alpha}}{\Gamma(4-\alpha)} - \frac{\omega_0^2 v_0 t^3}{6} + o(t^3). \quad (25)$$

Portanto, $\ddot{x}(0^+) = -\omega_0^2 x_0$: a aceleração inicial é finita. No caso clássico, $\alpha = 1$, ela vale $-\lambda_1 v_0 - \omega_0^2 x_0$. Se $\lambda_1 v_0 \neq 0$, os limites $t \rightarrow 0^+$ e $\alpha \rightarrow 1^-$ não comutam na aceleração. A diferença resulta da inicialização da memória, cuja contribuição se anula na origem para ordem fracionária fixa.

D.2 Recuperação de movimentos conhecidos

Quando $\lambda_\alpha = 0$, a solução se reduz ao oscilador sem amortecimento, $x = x_0 \cos(\omega_0 t) + (v_0/\omega_0) \sin(\omega_0 t)$. Se $\omega_0 = 0$, obtemos

$$x(t) = x_0 + v_0 t E_{2-\alpha, 2}(-\lambda_\alpha t^{2-\alpha}), \quad E_{\mu, \beta}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\beta + \mu n)}. \quad (26)$$

Quando ambos os coeficientes são nulos, resta o movimento livre $x = x_0 + v_0 t$. Os casos com $k = 0$ ficam fora da adimensionalização usada no texto, mas continuam sendo controles da solução dimensional.

No limite $\alpha \rightarrow 1^-$, com $\lambda_\alpha \rightarrow \lambda_1$, definimos $\gamma = \lambda_1/2$ e $B = v_0 + \gamma x_0$. Recuperamos então os três regimes clássicos:

$$x(t) = e^{-\gamma t} \begin{cases} x_0 \cos(\Omega t) + (B/\Omega) \sin(\Omega t), & \gamma < \omega_0, \\ x_0 + Bt, & \gamma = \omega_0, \\ x_0 \cosh(\kappa t) + (B/\kappa) \sinh(\kappa t), & \gamma > \omega_0, \end{cases} \quad (27)$$

Aqui, $\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$ e $\kappa = \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$ nas linhas em que aparecem. A classificação por esses três regimes decorre do denominador quadrático clássico. O denominador fracionário exige a análise da potência complexa.

No limite oposto, ${}^C D^\alpha x \rightarrow x - x_0$ quando $\alpha \rightarrow 0^+$. Para $\lambda_\alpha \rightarrow \lambda_0$ e $\Omega_*^2 = \lambda_0 + \omega_0^2 > 0$, resulta

$$x(t) \longrightarrow \frac{\lambda_0 x_0}{\Omega_*^2} + \frac{\omega_0^2 x_0}{\Omega_*^2} \cos(\Omega_* t) + \frac{v_0}{\Omega_*} \sin(\Omega_* t). \quad (28)$$

A posição inicial continua presente no termo constante. Por isso, substituir o operador por x em vez de $x - x_0$ mudaria esse limite. O intervalo $1 < \alpha < 2$ exige outra expressão de partida: a transformada de Caputo passaria a conter também $-s^{\alpha-2} v_0$.

D.3 Origem da cauda algébrica

Para $\lambda_\alpha > 0$ e $\omega_0 > 0$, considere $D(s) = s^2 + \lambda_\alpha s^\alpha + \omega_0^2$, no ramo principal. Esse denominador não tem zeros no semiplano fechado direito. Para $s \neq 0$ nessa região,

$$\operatorname{Re} \frac{D(s)}{s} = \operatorname{Re} s + \lambda_\alpha \operatorname{Re} s^{\alpha-1} + \omega_0^2 \operatorname{Re}(1/s) > 0, \quad (29)$$

A parcela intermediária permanece estritamente positiva inclusive no eixo imaginário, porque $\alpha - 1 \in (-1, 0)$. Na origem, tratada separadamente, $D(0) = \omega_0^2$.

Para $x_0 \neq 0$, o termo não analítico dominante de $X(s)$ perto de $s = 0$ é $(\lambda_\alpha x_0 / \omega_0^2) s^{\alpha-1}$. Na inversão de Laplace, a contribuição do corte fornece a cauda (10). Se $x_0 = 0$ e $v_0 \neq 0$, a primeira potência não analítica muda, e o resultado passa a ser

$$x(t) \sim -\frac{\lambda_\alpha v_0}{\omega_0^4 \Gamma(-\alpha)} t^{-1-\alpha}. \quad (30)$$

Os polos à esquerda contribuem com transientes exponenciais; a ramificação determina o decaimento em tempos longos. A condição inicial, portanto, participa da escolha do expoente observado. Essas expressões assintóticas não são uniformes quando a ordem se aproxima de zero ou de um.

E Reprodução dos cálculos

O material suplementar reúne os programas em Python, os dados numéricos e as figuras. A reprodução dos cálculos requer apenas as dependências indicadas em `requirements.txt`; não utiliza dados externos.

Para recalcular os resultados, extraia `material_suplementar.zip` e execute os comandos abaixo em Python 3, a partir da pasta extraída:

```
python -m pip install -r requirements.txt
python codigo/reproduzir.py
python codigo/complementos.py
python codigo/gerar_tabelas.py
```

O programa `reproduzir.py` calcula a comparação principal, os controles clássicos, os erros relativos da cauda e as figuras adimensionais. O programa `complementos.py` calcula a cota de truncamento e o exemplo dimensional, incluindo a comparação da inversão com 50 e 80 dígitos no tempo longo. Por fim, `gerar_tabelas.py` converte os resultados CSV em tabelas LaTeX. Os valores tabulados são obtidos pelos cálculos, sem inserção manual de resultados nos programas.

Os valores de alta precisão são gravados como texto para evitar conversão involuntária para precisão dupla. A conversão para float ocorre apenas no desenho dos gráficos. O arquivo `ambiente.json` registra as versões utilizadas. Em `comparacoes.csv`, estão os 192 registros da grade principal: 24 pares, quatro cortes e duas precisões. O arquivo `cotas.csv` inclui a cota no corte selecionado e no anterior, o que permite conferir o critério de parada. A comparação de precisão adicional da aplicação está em `controle_cauda.csv`.

As rotinas usam a precisão global de `mpmath` e devem ser executadas em sequência, como nos comandos acima. O processamento pode levar alguns minutos, conforme o equipamento. Ao alterar parâmetros ou malhas, é necessário regenerar tabelas e figuras e conferir os valores citados na discussão, pois os trechos narrativos não são atualizados automaticamente.

F Declaração de conflito de interesses

Os autores declaram não haver conflitos de interesse relacionados a este trabalho.

G Declaração de uso de IA

A ferramenta ChatGPT, da OpenAI, foi utilizada exclusivamente para correção ortográfica e aprimoramento da fluidez e da clareza do texto, com o objetivo de facilitar sua compreensão.

Este preprint foi submetido sob as seguintes condições:

- Os autores declaram que os necessários Termos de Consentimento Livre e Esclarecido de participantes ou pacientes na pesquisa foram obtidos e estão descritos no manuscrito, quando aplicável.
- Os autores declaram que a elaboração do manuscrito seguiu as normas éticas de comunicação científica.
- Os autores declaram que estão cientes que são os únicos responsáveis pelo conteúdo do preprint e que o depósito no SciELO Preprints não significa nenhum compromisso de parte do SciELO, exceto sua preservação e disseminação.
- Os autores declaram que os dados, aplicativos e outros conteúdos subjacentes ao manuscrito estão referenciados.
- O manuscrito depositado está no formato PDF.
- Os autores declaram que a pesquisa que deu origem ao manuscrito seguiu as boas práticas éticas e que as necessárias aprovações de comitês de ética de pesquisa, quando aplicável, estão descritas no manuscrito.
- Os autores declaram que uma vez que um manuscrito é postado no servidor SciELO Preprints, o mesmo só poderá ser retirado mediante pedido à Secretaria Editorial do SciELO Preprints, que afixará um aviso de retratação no seu lugar.
- Os autores concordam que o manuscrito aprovado será disponibilizado sob licença [Creative Commons CC-BY](#).
- O autor submissor declara que as contribuições de todos os autores e declaração de conflito de interesses estão incluídas de maneira explícita e em seções específicas do manuscrito.
- Os autores declaram que o manuscrito não foi depositado e/ou disponibilizado previamente em outro servidor de preprints ou publicado em um periódico.
- Caso o manuscrito esteja em processo de avaliação ou sendo preparado para publicação mas ainda não publicado por um periódico, os autores declaram que receberam autorização do periódico para realizar este depósito.
- O autor submissor declara que todos os autores do manuscrito concordam com a submissão ao SciELO Preprints.