SUMA DE DIVISORES PROPIOS: UNA IDENTIDAD ALGEBRAICA GENERAL Y LOS NÚMEROS PERFECTOS

Imanol Urcola

https://doi.org/10.1590/SciELOPreprints.18161

Envíado en: 2026-09-24
Postado en: 2026-09-25 (versión 1)
(AAAA-MM-DD)

SUMA DE DIVISORES PROPIOS: UNA IDENTIDAD ALGEBRAICA GENERAL Y LOS NÚMEROS PERFECTOS

SUM OF PROPER DIVISORS: A GENERAL ALGEBRAIC IDENTITY AND PERFECT NUMBERS

Imanol Urcola

Investigador independiente, Barcelona, Cataluña, España

ORCID: https://orcid.org/0009-0002-7999-103X

ABSTRACT

In this article, a general algebraic identity for the sum of the proper divisors of every integer greater than one is proposed. Using this identity and some auxiliary results, it has been proved that all perfect numbers have the form described by the Euclid-Euler Theorem.

Keywords: perfect numbers, sigma function, Euclid-Euler Theorem, proper divisors, algebraic identity

RESUMEN

En este artículo se propone una identidad algebraica general para la suma de los divisores propios de todo número natural mayor que uno. Utilizando esta identidad y algunos resultados auxiliares, se demuestra que todos los números perfectos son de la forma que describe el Teorema de Euclides-Euler.

Palabras clave: números perfectos, función sigma, Teorema Euclides-Euler, divisores propios, identidad algebraica

1. INTRODUCCIÓN

Los números perfectos son aquellos números enteros positivos que son iguales que la suma de todos sus divisores propios. Ya en la antigüedad, Euclides descubrió los cuatro primeros números perfectos, todos ellos pares, y propuso una fórmula general para encontrarlos. Así, Euclides propuso que un número par es perfecto si es de la forma $2^{p-1}(2^p - 1)$, donde $2^p - 1$ es un número primo. Siglos más tarde, Euler demostró que, si un número par es perfecto, entonces tiene la forma descrita por Euclides. Este resultado se conoce como el Teorema de Euclides-Euler [1]. Para demostrar este resultado, Euler utilizó la función sigma (σ), la cual es la suma de todos los divisores positivos de un número entero positivo. Euler utilizó las propiedades de esta función para demostrar el teorema que lleva su nombre, y le sirvió también para describir qué forma tendría un número perfecto impar, en el caso de que existiera. Esa forma es $N = p^{4k+1}M^2$; con $p = 4n+1$ un número primo y M^2 un cuadrado perfecto [2]. Y es que ni Euclides ni Euler consiguieron demostrar o refutar la existencia de los números perfectos impares. Hoy en día, se conocen 52 números perfectos, todos ellos pares y relacionados con los primos de Mersenne [3]. Pero a pesar de los avances que se han hecho en el tema [4], se sigue sin saber si existen o no los números perfectos impares. Una de las limitaciones es el desconocimiento de las propiedades de la suma de los divisores propios. La función σ es a día de hoy una de las bazas más utilizada por los investigadores para abordar este problema.

2. DEFINICIONES

Definición 1: para todo $n \in \mathbb{N}$ y $n>0$, la función $\sigma(n)$ es la suma de todos los divisores positivos de n.

$$\sigma(n) = \sum_{d|n} d$$

Algunas de las propiedades de esta función que serán de importancia en este trabajo son:

- Propiedad multiplicativa: si mcd(n, m) = 1; entonces $\sigma(nm) = \sigma(n) \cdot \sigma(m)$
- La función sigma de un número primo p vale siempre $\sigma(p) = p + 1$
- Si n vale 1, entonces $\sigma(1) = 1$

- Si *n* es un número perfecto, entonces *σ(n) = 2n*
- En el caso de una potencia de un número primo *p*, la función sigma forma una progresión geométrica:

$$\sigma(p^a) = 1 + p + p^2 + \cdots + p^a = \frac{p^{a+1} - 1}{p - 1}$$

Definición 2: para todo $n \in \mathbb{N}$ y $n>0$, la función *f(n)* es la suma de los divisores propios de *n*; y se define en función de *σ(n)* tal que

$$f(n) = \sigma(n) - n$$

Esta función también tiene algunas propiedades que serán importantes en el desarrollo de este trabajo, como por ejemplo:

- Si *n* es un número perfecto, entonces *f(n) = n*
- La función *f* de un primo *p* vale siempre *f(p) =* 1
- Si *n* es 1, entonces *f(*1*) =* 0

PROPOSICIÓN: sea *p* un número primo y $a \in \mathbb{N}$ su exponente. Entonces se cumple que

$$\sigma(p^a) = f(p^{a+1})$$

Demostración: como hemos visto en la Definición 1, *σ(p^a)* forma una progresión geométrica

$$\sigma(p^a) = 1 + p + p^2 + \cdots + p^a$$

Si elevamos *p* a *a+1*, obtenemos un término más en la progresión de arriba. Todos los anteriores términos conforman ahora los divisores propios del nuevo término

$$\sigma(p^{a+1}) = 1 + p + p^2 + \cdots + p^a + p^{a+1}$$

$$\sigma(p^{a+1}) - p^{a+1} = 1 + p + p^2 + \cdots + p^a = f(p^{a+1})$$

3. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

LEMA: para todo $n \in \mathbb{N}$ y $n>1$, se cumple que

$$f(n) | n \leftrightarrow f(n) = 1 \vee f(n) = n$$

Demostración: definimos el conjunto formado por todos los divisores positivos de *n*

$$Div(n) = \{d_1, d_2, d_3, \ldots d_r, n\}$$

Donde $d_1 = 1$ y d_r es el su divisor propio más grande de n. Dado que $f(n)$ se define como la suma de los divisores propios de n, tenemos que

$$f(n) = \sum_{i=1}^{r} d_i$$

Fijémonos en los valores que puede tomar r; que nos indica en este caso el número de divisores propios de n:

- Si $r > 1$, entonces $f(n) > d_r$, lo que implica que $f(n)$ divide n si y solo si $f(n) = n$, ya que n es el único divisor de n mayor que d_r.
- Si $r = 1$, entonces $d_1 = 1$ es el único divisor propio de n, por tanto, $f(n)$ divide n y n es primo.

IDENTIDAD: para todo $n \in \mathbb{N}$ y $n>1$, se cumple la identidad

$$f(n) = \sigma(p_1^{e1}) \cdot f\left(\frac{n}{p_1^{e1}}\right) + \sigma(p_1^{e1-1})\frac{n}{p_1^{e1}}$$

Donde p_1 es el factor primo más pequeño de n, e_1 es su exponente, σ es la función suma de todos los divisores positivos y f es la función suma de divisores propios.

Demostración: sea n un número con factorización prima

$$n = p_1^{e1} \cdot p_2^{e2} \cdot p_3^{e3} \cdot \ldots \cdot p_r^{er}$$

Donde $p_1, p_2 \ldots p_r$ son, de menor a mayor, los distintos factores primos de n; y $e_1, e_2 \ldots e_r$ son sus exponentes.

Y sea n/p_1 el divisor propio más grande de n, con factorización prima

$$\frac{n}{p_1} = p_1^{e1-1} \cdot p_2^{e2} \cdot p_3^{e3} \cdot \ldots \cdot p_r^{er}$$

Fijándonos en la factorización prima de ambos números, se deduce que todos los divisores de n/p_1, incluido el propio n/p_1, dividen n. Es decir, todos ellos son divisores propios de n. Además, todos estos divisores sumados dan $\sigma(n/p_1)$, lo que implica que

$$f(n) \geq \sigma\left(\frac{n}{p_1}\right)$$

Observemos ahora que, de entre todos los divisores propios de n, los únicos que no dividen n/p_1 son aquellos divisores múltiplos de p_1^{e1}. Por tanto, podemos redefinir $f(n)$ para obtener la siguiente expresión

(1) $$f(n) = \sigma\left(\frac{n}{p_1}\right) + \sum_{\substack{d|n \\ p_1^{e1}|d \\ d<n}} d$$

Para calcular la suma de los divisores propios de *n* múltiplos de p_1^{e1}, haremos la siguiente operación:

$$\sum_{\substack{d|n \\ p_1^{e1}|d \\ d<n}} d = \sigma(n) - \sigma\left(\frac{n}{p_1}\right) - n$$

Lo haremos así porque, como veremos, podemos extraer factores comunes entre $\sigma(n)$ y $\sigma(n/p_1)$ que nos facilitarán llegar a la identidad. Utilizando la notación de factorización prima, aplicando las propiedades de la función sigma y reordenando los términos, obtenemos

(2) $$\sum_{\substack{d|n \\ p_1^{e1}|d \\ d<n}} d = \sigma\left(p_1^{e1} \cdot p_2^{e2} \cdot \ldots \cdot p_r^{er}\right) - \sigma\left(p_1^{e1-1} \cdot p_2^{e2} \cdot \ldots \cdot p_r^{er}\right) - p_1^{e1} \cdot p_2^{e2} \cdot \ldots \cdot p_r^{er}$$

$$\sum_{\substack{d|n \\ p_1^{e1}|d \\ d<n}} d = \sigma\left(p_1^{e1}\right) \cdot \sigma\left(p_2^{e2}\right) \cdot \ldots \cdot \sigma\left(p_r^{er}\right) - \sigma\left(p_1^{e1-1}\right) \cdot \sigma\left(p_2^{e2}\right) \cdot \ldots \cdot \sigma\left(p_r^{er}\right) - p_1^{e1} \cdot p_2^{e2} \cdot \ldots \cdot p_r^{er}$$

$$\sum_{\substack{d|n \\ p_1^{e1}|d \\ d<n}} d = \left[\sigma\left(p_2^{e2}\right) \cdot \ldots \cdot \sigma\left(p_r^{er}\right)\right]\left[\sigma\left(p_1^{e1}\right) - \sigma\left(p_1^{e1-1}\right)\right] - p_1^{e1} \cdot p_2^{e2} \cdot \ldots \cdot p_r^{er}$$

$$\sum_{\substack{d|n \\ p_1^{e1}|d \\ d<n}} d = p_1^{e1}\left[\sigma\left(p_2^{e2}\right) \cdot \ldots \cdot \sigma\left(p_r^{er}\right)\right] - p_1^{e1} \cdot p_2^{e2} \cdot \ldots \cdot p_r^{er}$$

$$\sum_{\substack{d|n \\ p_1^{e1}|d \\ d<n}} d = p_1^{e1}\left[\sigma\left(p_2^{e2}\right) \cdot \ldots \cdot \sigma\left(p_r^{er}\right) - p_2^{e2} \cdot \ldots \cdot p_r^{er}\right]$$

$$\sum_{\substack{d|n \\ p_1^{e1}|d \\ d<n}} d = p_1^{e1} \cdot f\left(p_2^{e2} \cdot \ldots \cdot p_r^{er}\right)$$

$$\sum_{\substack{d|n \\ p_1^{e1}|d \\ d<n}} d = p_1^{e1} \cdot f\left(\frac{n}{p_1^{e1}}\right)$$

De esta manera, sustituimos (2) en (1) y obtenemos la primera versión de lo que será la Identidad final

(3) $$f(n) = p_1^{e1} \cdot f\left(\frac{n}{p_1^{e1}}\right) + \sigma\left(\frac{n}{p_1}\right)$$

La expresión (3) relaciona entre sí dos divisores propios distintos de *n*; por un lado tenemos n/p_1, y por otro tenemos n/p_1^{e1}

$$\frac{n}{p_1^{e1}} = p_2^{e2} \cdot p_3^{e3} \dots \cdot p_r^{er}$$

Partiendo ahora de (3), utilizamos la definición de la función *f* (Definición 2) con $\sigma(n/p_1)$ para así ampliar la expresión, tal que

$$f(n) = p_1^{e1} \cdot f\left(\frac{n}{p_1^{e1}}\right) + \frac{n}{p_1} + f\left(\frac{n}{p_1}\right)$$

O, lo mismo, pero utilizando la notación de factores primos

$$f(n) = p_1^{e1} \cdot f(p_2^{e2} \cdot \dots \cdot p_r^{er}) + p_1^{e1-1} \cdot p_2^{e2} \cdot \dots \cdot p_r^{er} + f(p_1^{e1-1} \cdot p_2^{e2} \cdot \dots \cdot p_r^{er})$$

Llegados a este punto, aplicamos (3) a $f(n/p_1)$. Y así, podemos ampliar la identidad aplicando de forma iterativa primero la Definición 2 y después (3) a cada nuevo divisor propio de *n* que obtengamos. Repetimos este proceso hasta llegar a $\sigma(n/p_1^{e1})$, donde utilizamos la Definición 2 por última vez y concluimos.

$$\begin{aligned} f(n) = p_1^{e1} \cdot f\left(\frac{n}{p_1^{e1}}\right) + \underbrace{\sigma(p_1^{e1-1} \cdot p_2^{e2} \cdot \dots \cdot p_r^{er})}& \\ p_1^{e1-1} \cdot p_2^{e2} \cdot \dots \cdot p_r^{er} + \underbrace{f(p_1^{e1-1} \cdot p_2^{e2} \cdot \dots \cdot p_r^{er})}& \\ p_1^{e1-1} \cdot f\left(\frac{n}{p_1^{e1}}\right) + \underbrace{\sigma(p_1^{e1-2} \cdot p_2^{e2} \cdot \dots \cdot p_r^{er})}& \\ \vdots& \\ p_1 \cdot f\left(\frac{n}{p_1^{e1}}\right) + \underbrace{\sigma(p_2^{e2} \cdot \dots \cdot p_r^{er})}& \\ p_2^{e2} \cdot \dots \cdot p_r^{er} + f(p_2^{e2} \cdot \dots \cdot p_r^{er})& \end{aligned}$$

Si nos fijamos en los términos que obtenemos mediante este proceso iterativo, vemos que podemos extraer $f(n/p_1^{e1})$ y n/p_1^{e1} (es decir, $p_2^{e2} \cdot \dots \cdot p_r^{er}$) como factores comunes, permitiéndonos reordenar los términos

$$f(n) = f\left(\frac{n}{p_1^{e1}}\right)(p_1^{e1} + p_1^{e1-1} + \dots + p_1 + 1) + \frac{n}{p_1^{e1}}(p_1^{e1-1} + p_1^{e1-2} + \dots + p_1 + 1)$$

Estos nuevos términos entre paréntesis que hemos obtenido son $\sigma(p_1^{e1})$ y $\sigma(p_1^{e1-1})$, respectivamente. De este modo, queda demostrada la Identidad.

$$f(n) = \sigma(p_1^{e1}) \cdot f\left(\frac{n}{p_1^{e1}}\right) + \sigma(p_1^{e1-1})\frac{n}{p_1^{e1}}$$

TEOREMA: Sea $n \in \mathbb{N}$ y $n>1$ un número perfecto. Entonces n es de la forma descrita por el Teorema de Euclides-Euler

$$n = 2^{p-1} \cdot (2^p - 1)$$

Donde $2^p - 1$ es primo.

Demostración: sea n un número perfecto. Si n es perfecto, entonces vale lo mismo que la Identidad. Si reordenamos los términos, observamos que

$$n = \sigma(p_1^{e1}) \cdot f\left(\frac{n}{p_1^{e1}}\right) + \sigma(p_1^{e1-1})\frac{n}{p_1^{e1}}$$

$$n - \sigma(p_1^{e1-1})\frac{n}{p_1^{e1}} = \sigma(p_1^{e1}) \cdot f\left(\frac{n}{p_1^{e1}}\right)$$

$$\frac{n}{p_1^{e1}}[p_1^{e1} - \sigma(p_1^{e1-1})] = \sigma(p_1^{e1}) \cdot f\left(\frac{n}{p_1^{e1}}\right)$$

Y de esta última expresión, reordenando una última vez, podemos calcular el valor exacto de n/p_1^{e1} cuando n es perfecto, que sería

(4) $$\frac{n}{p_1^{e1}} = \frac{\sigma(p_1^{e1})}{p_1^{e1} - \sigma(p_1^{e1-1})} \cdot f\left(\frac{n}{p_1^{e1}}\right)$$

Es decir, si n es perfecto, entonces $f(n/p_1^{e1})$ divide a n/p_1^{e1}.

Gracias al Lema, sabemos que esto ocurre si y sólo si $f(n/p_1^{e1})$ es igual a 1 o a n/p_1^{e1}. Es imposible que $f(n/p_1^{e1})$ valga n/p_1^{e1} porque entonces la fracción a la que multiplica debería valer 1, y eso no puede ser porque $\sigma(p_1^{e1}) \neq p_1^{e1} - \sigma(p_1^{e1-1})$.

Por tanto, queda demostrado que si n es perfecto, entonces $f(n/p_1^{e1}) = 1$ y, en consecuencia, n/p_1^{e1} es primo. Así, reescribimos (4) de la siguiente manera.

$$\frac{n}{p_1^{e1}} = \frac{\sigma(p_1^{e1})}{p_1^{e1} - \sigma(p_1^{e1-1})}$$

Ahora, si analizamos la fracción a derecha de esta igualdad, vemos que admite dos tipos de soluciones enteras:

Caso 1: el numerador es múltiplo del denominador, de manera que

$$\frac{\sigma(p_1^{e1})}{p_1^{e1} - \sigma(p_1^{e1-1})} = \frac{k\left(\frac{n}{p_1^{e1}}\right)}{k}$$

Con $k \in \mathbb{N}$ y $k>1$

Este caso no se cumple. Aplicando la Proposición, podemos reescribir esta expresión como

$$\frac{\sigma(p_1^{e1})}{p_1^{e1} - \sigma(p_1^{e1-1})} = \frac{p_1^{e1} + f(p_1^{e1})}{p_1^{e1} - f(p_1^{e1})}$$

Que el denominador divida al numerador en este caso, implica necesariamente que p_1^{e1} sea múltiplo de $f(p_1^{e1})$. Por tanto, volvemos a aplicar el Lema.

Si $f(p_1^{e1}) = p_1^{e1}$ tenemos un cero en el denominador, lo cual no tiene sentido.

Si $f(p_1^{e1}) = 1$ tenemos una fracción entera formada por dos números de igual paridad y que difieren en 2. Así, sólo existe una solución posible, y es la fracción entera* que se obtiene con $p_1^{e1} = 2$. Pero si $p_1^{e1} = 2$, el denominador vale $k = 1$, con lo que esta solución no cumple los requisitos que hemos impuesto; pertenece en realidad al Caso 2.

*Con $p_1^{e1} = 3$ también obtenemos una fracción entera que vale 2, pero como 2<3 no es posible que p_1^{e1} sea 3.

Caso 2: el denominador vale 1 y, por tanto

$$\frac{n}{p_1^{e1}} = \sigma(p_1^{e1})$$

Esta solución sí es válida y además implica que $p_1 = 2$ necesariamente, no puede tener ningún otro valor. Esto se demuestra aplicando las propiedades de la función σ dadas en la Definición 1:

$$p_1^{e1} - \sigma(p_1^{e1-1}) = 1$$

$$p_1^{e1} - \frac{p_1^{e1} - 1}{p_1 - 1} = 1$$

Esto sólo se cumple si el denominador $p_1 - 1$ vale 1, lo que implica que $p_1 = 2$. Por tanto, acabamos de demostrar que todo número perfecto es de la forma

$$n = 2^{e1} \cdot \sigma(2^{e1})$$

Donde $\sigma(2^{e1})$ es primo.

Y, de nuevo, aplicando las propiedades de la función σ, obtenemos

$$n = 2^{e1} \cdot (2^{e1+1} - 1)$$

Como $2^{e1+1} - 1$ es primo, el exponente $e1+1$ es también primo, porque de lo contrario, podríamos factorizar $2^{e1+1} - 1$. Es decir, si suponemos $e1+1 = ab$ un compuesto, tenemos

$$2^{ab} - 1 = (2^a)^b - 1 = (2^a - 1)\left(2^{a(b-1)} + 2^{a(b-2)} + \cdots + 1\right)$$

Y esto no puede ser, porque $2^{e1+1} - 1$ es primo. Por tanto, todo número perfecto es de la forma

$$n = 2^{p-1} \cdot (2^p - 1)$$

Donde $2^p - 1$ es primo. De este modo, queda demostrado el Teorema.

Declaración de disponibilidad de los datos de investigación

El conjunto de datos que apoya los resultados de este estudio se publicó en el propio artículo.

Declaración de uso de la Inteligencia Artificial

El autor declara no haber utilizado la Inteligencia Artificial en la preparación de este documento.

Conflicto de intereses

El autor declara que no existe ningún conflicto de intereses.

BIBLIOGRAFIA

[1] Sáenz de Cabezón, E. "*Apocalipsis Matemático"*. Somos B, 2020

[2] Beasley, B. D. "Euler and the ongoing search for odd perfect numbers." *ACMS 19th Biennial Conference Proceedings, Bethel University,* Saint Paul, MN, 2013.

[3] https://www.mersenne.org/ (actualizado 13/09/2026)

[4] Gumaru, R. C. R., Casuco, L. S., and Bernal Jr, H. L. "Formulating an Odd Perfect Number: An in Depth Case Study". *Pure and Applied Mathematics Journal*, 7, No. 5, 2018, pp. 63-67

Este preprint fue presentado bajo las siguientes condiciones:

- Los autores declaran que se obtuvieron los términos necesarios del consentimiento libre e informado de los participantes o pacientes en la investigación y se describen en el manuscrito, cuando corresponde.
- Los autores declaran que la preparación del manuscrito siguió las normas éticas de comunicación científica.
- Los autores declaran que son conscientes de que son los únicos responsables del contenido del preprint y que el depósito en SciELO Preprints no significa ningún compromiso por parte de SciELO, excepto su preservación y difusión.
- Los autores declaran que los datos, las aplicaciones y otros contenidos subyacentes al manuscrito están referenciados.
- El manuscrito depositado está en formato PDF.
- Los autores declaran que la investigación que dio origen al manuscrito siguió buenas prácticas éticas y que las aprobaciones necesarias de los comités de ética de investigación, cuando corresponda, se describen en el manuscrito.
- Los autores declaran que una vez que un manuscrito es postado en el servidor SciELO Preprints, sólo puede ser retirado mediante solicitud a la Secretaría Editorial deSciELO Preprints, que publicará un aviso de retracción en su lugar.
- Los autores aceptan que el manuscrito aprobado esté disponible bajo licencia Creative Commons CC-BY.
- El autor que presenta el manuscrito declara que las contribuciones de todos los autores y la declaración de conflicto de intereses se incluyen explícitamente y en secciones específicas del manuscrito.
- Los autores declaran que el manuscrito no fue depositado y/o previamente puesto a disposición en otro servidor de preprints o publicado en una revista.
- Si el manuscrito está siendo evaluado o siendo preparando para su publicación pero aún no ha sido publicado por una revista, los autores declaran que han recibido autorización de la revista para hacer este depósito.
- El autor que envía el manuscrito declara que todos los autores del mismo están de acuerdo con el envío a SciELO Preprints.