

Estado da publicação: O preprint não foi publicado em outro meio.

Números Neutrosóficos de Indeterminação Intervalar da Forma $a + bI$: Uma Análise Comparativa com Aritmética Intervalar e Aritmética Afim, com Extensões Multifonte e Hesitantes

Maikel Yelandi Leyva Vázquez, Florentin Smarandache

<https://doi.org/10.1590/SciELOPreprints.16004>

Submetido em: 2026-04-30

Postado em: 2026-06-03 (versão 1)

(AAAA-MM-DD)

Preprint depositado no servidor SciELO Preprints. Este manuscrito ainda não foi submetido à revisão por pares. Conteúdo distribuído sob licença Creative Commons CC-BY 4.0.

Artigo de Pesquisa / Research Article

Números Neutrosóficos de Indeterminação Intervalar da Forma $a + bI$: Uma Análise Comparativa com Aritmética Intervalar e Aritmética Afim, com Extensões Multifonte e Hesitantes

Neutrosophic Interval-Indeterminate Numbers of the Form $a + bI$: A Comparative Analysis with Interval and Affine Arithmetic, with Multi-Source and Hesitant Extensions

Florentin Smarandache¹, Maikel Yelandi Leyva Vázquez^{2*}

¹ University of New Mexico, Mathematics, Physical and Natural Sciences Division, 705 Gurley Avenue, Gallup, NM 87301, USA. E-mail: smarand@unm.edu. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-5560-5926>.

² Universidad Bolivariana del Ecuador, Km 5½ Vía Durán-Yaguachi, Durán, Ecuador. E-mail: mleyvaz@gmail.com. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-0569-4932>.

* Autor correspondente: Maikel Yelandi Leyva Vázquez (mleyvaz@gmail.com).

Resumo

A representação da incerteza em matemática aplicada evoluiu por meio da aritmética intervalar clássica, da aritmética afim e da teoria neutrosófica; entretanto, não existe uma comparação sistemática entre os números neutrosóficos de indeterminação intervalar $a + bI$ e a aritmética afim, apesar de seu desenvolvimento paralelo desde 1993. Este trabalho formaliza essa comparação: em uma dimensão, demonstra-se a equivalência de imagem (Teorema 1); propõe-se uma extensão neutrosófica multifonte (MSNN) que alcança paridade N-dimensional com a aritmética afim preservando a transparência semântica da notação $a + bI$ (Teorema 2); e introduz-se uma extensão hesitante para modelar a discordância entre especialistas. Apresenta-se um conjunto de avaliações computacionais sobre quinze expressões algébricas, com tempos de execução, largura de imagem e percentuais de superestimativa. A extensão hesitante $N_H = a + b \cdot H(I)$ captura estados epistêmicos produzidos pelo desacordo entre especialistas que nem a aritmética intervalar nem a aritmética afim nativa conseguem representar. Conclui-se que a aritmética neutrosófica e a aritmética afim ocupam posições complementares: a afim para precisão de engenharia com rastreamento multifonte; a neutrosófica para transparência semântica, alcance qualitativo mais amplo e consolidação natural de evidência hesitante. Uma implementação de referência em Python é publicada sob licença MIT em <https://github.com/mleyvaz/neutrosophic-affine>, permitindo a reprodução completa de teoremas, exemplos, avaliações e figuras do artigo.

Palavras-chave: números neutrosóficos; indeterminação intervalar; aritmética afim; conjuntos neutrosóficos hesitantes; número neutrosófico multifonte (MSNN); problema de dependência; quantificação de incerteza; tomada de decisão multicritério.

Abstract

Uncertainty representation in applied mathematics has evolved through classical interval arithmetic, affine arithmetic, and neutrosophic theory; yet no systematic comparison exists between neutrosophic interval-indeterminate numbers $a + bI$ and affine arithmetic, despite their parallel development since 1993. This paper formalizes the comparison: in one dimension we prove range equivalence (Theorem 1); we propose a multi-source neutrosophic extension (MSNN) that achieves N -dimensional parity with affine arithmetic while preserving the semantic transparency of the $a + bI$ notation (Theorem 2); and we introduce a hesitant extension to model expert disagreement. A computational benchmark on fifteen algebraic expressions is provided with runtime, range width, and overestimation percentages. The hesitant extension $N_H = a + b \cdot H(I)$ captures epistemic states produced by expert disagreement that neither interval arithmetic nor native affine arithmetic can represent. We conclude that neutrosophic and affine arithmetic occupy complementary positions: affine for engineering precision with multi-source tracking; neutrosophic for semantic transparency, broader qualitative scope, and natural hesitant-evidence consolidation. A reference Python implementation is released under MIT License at <https://github.com/mleyvaz/neutrosophic-affine>, enabling full reproduction of theorems, examples, benchmarks, and figures.

Keywords: neutrosophic numbers; interval indeterminacy; affine arithmetic; hesitant neutrosophic sets; multi-source neutrosophic number (MSNN); dependency problem; uncertainty quantification; multi-criteria decision making.

1. Introdução

A representação da incerteza em matemática aplicada evoluiu por meio de vários formalismos, cada um abordando limitações de seus antecessores. A aritmética intervalar clássica (Moore, 1966; Moore, Kearfott & Cloud, 2009) forneceu o primeiro tratamento sistemático da incerteza limitada, mas sofre do problema de dependência: cada ocorrência de uma variável é tratada como independente, produzindo uma superestimativa do intervalo de valores quando há repetição.

A aritmética afim (Stolfi & de Figueiredo, 1993; de Figueiredo & Stolfi, 2004) abordou essa limitação rastreando correlações por meio de termos de ruído simbólicos $e_i \in [-1, +1]$, cada um identificando uma fonte específica de incerteza. Símbolos de ruído compartilhados entre quantidades permitem que o formalismo cancele dependências exatamente. A aritmética afim amadureceu em domínios de engenharia como sistemas de potência (Vaccaro, 2022), simulação de circuitos, verificação formal (Moscato et al., 2015) e certificação de erro de ponto flutuante (Goubault & Putot, 2020).

Em paralelo, a teoria neutrosófica (Smarandache, 1998, 2003) introduziu uma representação alternativa $N = a + bI$, em que a é uma componente determinada e bI codifica um fator indeterminado com $I \in [0, 1]$. A aritmética neutrosófica difundiu-se na tomada de decisão multicritério (Abdel-Basset et al., 2024; Wang et al., 2010) e em aplicações qualitativas em ciências sociais e da saúde, domínios nos quais a aritmética afim raramente é aplicada.

A contribuição deste trabalho é quádrupla:

1. Demonstramos que a aritmética neutrosófica $a + bI$ e a aritmética afim são equivalentes em imagem na propagação de incertezas em uma dimensão (Teorema 1).

2. Introduzimos o Número Neutrosófico Multifonte (MSNN), $N = a + \sum_i b_i I_i$ com $I_i \in [0,1]$ mutuamente independentes, e demonstramos que o MSNN alcança a equivalência de imagem N -dimensional com a aritmética afim preservando a transparência semântica da notação $a + bI$ (Teorema 2).
3. Formalizamos a extensão neutrosófica hesitante $N_H = a + b \cdot H(I)$ com operadores baseados no princípio de extensão de Torra (2010), e quatro convenções explícitas de agregação por escore.
4. Disponibilizamos uma implementação de referência em Python sob código aberto e reportamos uma avaliação computacional de quinze expressões que compara os formalismos intervalar, afim, neutrosófico clássico e MSNN quanto à largura de imagem, superestimativa em relação ao valor exato e tempo de execução.

O escopo deste artigo restringe-se à forma de indeterminação intervalar $a + bI$ e suas extensões multifonte e hesitante. A estrutura neutrosófica triádica mais ampla (T, I, F) — que sustenta a paraconsistência e a tomada de decisão multicritério — é abordada em trabalhos correlatos.

2. Preliminares

2.1 Aritmética Intervalar Clássica

Um intervalo é um subconjunto fechado e limitado $[a, b] \subset \mathbb{R}$ com $a \leq b$. As operações básicas são:

$$[a, b] + [c, d] = [a + c, b + d]$$

$$[a, b] - [c, d] = [a - d, b - c]$$

$$[a, b] \cdot [c, d] = [\min(ac, ad, bc, bd), \max(ac, ad, bc, bd)]$$

A aritmética intervalar é computacionalmente barata e amplamente adotada, mas cada ocorrência de uma variável é tratada como independente. Assim, $[a,b] - [a,b] = [a-b, b-a]$ em vez de $\{0\}$.

2.2 Aritmética Afim

Uma forma afim é uma expressão simbólica

$$\hat{x} = x_0 + x_1 \cdot e_1 + x_2 \cdot e_2 + \dots + x_n \cdot e_n$$

onde x_0 é o valor central, x_i são coeficientes reais, e e_i são símbolos de ruído independentes com $e_i \in [-1, +1]$. Cada e_i identifica uma fonte específica de incerteza. As operações afins (+, -, escalar·) preservam símbolos compartilhados e cancelam dependências; operações não-afins (·, ÷, exp, log) introduzem um novo símbolo de ruído com magnitude limitada por aproximação de Chebyshev (Stolfi & de Figueiredo, 1993).

2.3 Números Neutrosóficos de Indeterminação Intervalar

Um número neutrosófico de indeterminação intervalar é

$$N = a + b \cdot I, \text{ com } I \in [0, 1]$$

onde a é a parte determinada, b o coeficiente de indeterminação e I o símbolo de indeterminação (Smarandache, 2003; Kandasamy & Smarandache, 2006). N assume valores em $[a, a + b]$ quando $b > 0$. As operações tratam I simbolicamente:

$$(a_1 + b_1 I) + (a_2 + b_2 I) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) \cdot I$$

$$(a_1 + b_1I) - (a_1 + b_1I) = 0 \quad (\text{cancelamento simbólico})$$

Sob a convenção idempotente, $I \cdot I = I$ (Kandasamy & Smarandache, 2006), obtém-se

$$(a_1 + b_1I)(a_2 + b_2I) = a_1a_2 + (a_1b_2 + a_2b_1 + b_1b_2) \cdot I$$

3. Equivalência de Imagem em Uma Dimensão

3.1 Exemplo Motivador: O Problema de Dependência

Considere duas medições do mesmo lote de 100 litros com um sensor de tolerância ± 5 litros. Calculamos a diferença $N - N$, que fisicamente deve ser zero.

Formalism	Representation of N	Result of N - N
Interval	[100, 105]	[-5, +5] (spurious, width 10)
Affine	$\hat{x} = 102.5 + 2.5 \cdot e_1$	0 (exact, by shared e_1)
Neutrosophic	$N = 100 + 5 \cdot I$	0 (exact, by symbolic I)

3.2 Enunciado Formal e Demonstração

Demonstramos agora que o cancelamento observado acima não é coincidência: os formalismos afim e neutrosófico produzem imagens idênticas para toda expressão algébrica em uma única variável.

Teorema 1 (Equivalência de Imagem em Uma Dimensão). *Seja $E(x)$ uma expressão algébrica em uma única variável real x com imagem limitada $[\alpha, \beta]$. Seja $N(I) = \alpha + (\beta - \alpha) \cdot I$ a representação neutrosófica com $I \in [0, 1]$, e seja $\hat{x} = (\alpha + \beta)/2 + (\beta - \alpha)/2 \cdot e$ a representação afim com $e \in [-1, +1]$. Então*

$$\text{Im}(E(N(I))) = \text{Im}(E(\hat{x})).$$

Demonstração. Por indução estrutural sobre E.

Caso base. A identidade $E(x) = x$ produz $N(I)$ com imagem $[\alpha, \beta]$ e \hat{x} com imagem $[(\alpha+\beta)/2 - (\beta-\alpha)/2, (\alpha+\beta)/2 + (\beta-\alpha)/2] = [\alpha, \beta]$. A bijeção $\varphi: I \mapsto 2I - 1 = e$ é um homeomorfismo de $[0,1]$ sobre $[-1,+1]$ que preserva ambas as representações exatamente. Assim, o caso base é válido.

Passo indutivo, operações afins. Supondo que E_1 e E_2 satisfazem o teorema. Para a adição,

$$E_1(N) + E_2(N) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) \cdot I, \quad \hat{E}_1 + \hat{E}_2 \text{ tem adição por coeficiente em } e.$$

Ambos produzem imagens da forma $[\gamma - \delta, \gamma + \delta]$ sob φ com γ e δ idênticos. A subtração e a multiplicação por escalar seguem analogamente. As operações afins preservam a equivalência.

Passo indutivo, operações não-afins. Para o caso univariado, as operações não-afins reduzem-se à sua imagem sobre a única variável. A forma neutrosófica aplica propagação de imagem por funções elementares (elevação monótona: exp, log em imagens positivas) ou linearização equivalente à de Chebyshev. A forma afim aplica linearização de Chebyshev e introduz um novo símbolo de ruído. Como ambas se reduzem ao mesmo intervalo limitado, as imagens coincidem.

■

A consequência prática é que, em problemas unidimensionais, o praticante não enfrenta um compromisso computacional entre $a + bI$ e a aritmética afim: ambos produzem imagens idênticas. As demais diferenças entre eles — notacional, aplicativa, extensional — são examinadas nas seções seguintes.

4. Números Neutrosóficos Multifonte (MSNN)

4.1 Motivação

A forma clássica $a + bI$ representa uma única fonte de indeterminação; não consegue rastrear dependências entre múltiplas fontes independentes de incerteza. A aritmética afim aborda isso por meio de múltiplos símbolos de ruído e_i . Fechamos agora essa lacuna no contexto neutrosófico.

Definição 1 (Número Neutrosófico Multifonte). Um número neutrosófico multifonte é

$$N = a + b_1 \cdot I_1 + b_2 \cdot I_2 + \dots + b_n \cdot I_n$$

onde cada $I_j \in [0, 1]$ é um símbolo de indeterminação mutuamente independente associado a uma fonte distinta de incerteza j . Fontes compartilhadas entre os operandos cancelam-se simbolicamente.

4.2 Teorema 2

Teorema 2 (Equivalência de Imagem N-Dimensional). Seja $E(x_1, \dots, x_n)$ uma expressão algébrica em n variáveis incertas independentes, cada uma com imagem limitada. Sejam (N_1, \dots, N_n) as representações MSNN com n símbolos de indeterminação independentes I_j , e $(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n)$ as representações afins. Então

$$\text{Im}(E(N_1, \dots, N_n)) = \text{Im}(E(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n)).$$

Esboço da demonstração. Indução estrutural como no Teorema 1. O passo novo essencial é que as operações afins entre variáveis preservam identificadores de fonte distintos ($I_i \neq I_j$ para $i \neq j$) do mesmo modo que a aritmética afim preserva e_i distintos. A bijeção

$$I_j = (1 + e_j)/2$$

é aplicada componente-a-componente em todas as n fontes. A demonstração formal completa segue o mesmo esquema indutivo do Teorema 1 e é omitida por brevidade.

4.3 Exemplo: Cancelamento de Duas Fontes

Sejam $x \in [10, 20]$ (fonte I_1) e $y \in [5, 10]$ (fonte I_2). Considere a expressão $x + y - x$:

$$\text{MSNN: } N = (10 + 10 \cdot I_1) + (5 + 5 \cdot I_2) - (10 + 10 \cdot I_1) = 5 + 5 \cdot I_2 \rightarrow \text{imagem } [5, 10]$$

$$\text{Afim: } \hat{z} = (15 + 5 \cdot e_1) + (7.5 + 2.5 \cdot e_2) - (15 + 5 \cdot e_1) = 7.5 + 2.5 \cdot e_2 \rightarrow \text{imagem } [5, 10]$$

Intervalar (sem rastreamento de fonte): \rightarrow imagem $[-5, 25]$ (largura espúria 30)

O MSNN cancela 'x' exatamente (compartilhando I_1) preservando 'y' (I_2), espelhando o comportamento afim com rótulos semânticos que identificam a fonte de cada termo.

5. Extensão Neutrosófica Hesitante

5.1 Motivação

Em situações reais de elicitación, uma única imagem de indeterminación raramente é suficiente: especialistas discordam, múltiplas fontes sugerem magnitudes diferentes, ou a indeterminación está distribuída de forma não-uniforme. O arcabouço de conjuntos fuzzy hesitantes (Torra, 2010; Xu & Xia, 2011; Liao, Xu, Zeng & Merigó, 2016) fornece a forma matemática para representar candidatos múltiplos não-comprometidos.

Definição 2 (Número Neutrosófico Hesitante). Um número neutrosófico hesitante de indeterminación intervalar é

$$N_H = a + b \cdot H(I), \quad H(I) = \{ h_1, h_2, \dots, h_k \}$$

onde cada h_j é um valor singular $h_j \in [0, 1]$ ou um intervalo $h_j = [h_{\min}^j, h_{\max}^j] \subseteq [0, 1]$. Quando $H(I)$ é singular, N_H reduz-se a $a + bI$ clássico.

5.2 Operadores via Princípio de Extensão

Seguindo Torra (2010), elevamos as operações binárias componente a componente:

$$N_H^{(1)} \oplus N_H^{(2)} = (a_1 + a_2) + (|b_1| + |b_2|) \cdot H_{\oplus}, \quad H_{\oplus} = \{ (b_1 \cdot h_i + b_2 \cdot h_j) / (|b_1| + |b_2|) : h_i \in H_1, h_j \in H_2 \}$$

Para evitar a explosão por produto cartesiano ($|H_1| \times |H_2|$ elementos após cada operação), aplicamos a redução canônica de Xu & Xia (2011), que projeta os elementos combinados sobre um espaço $[0, 1]$ normalizado e descarta duplicatas dentro de uma tolerância $\varepsilon > 0$.

5.3 Agregação por Escore

Estendemos a função de escore de Deli & Subas (2014) ao caso hesitante com quatro convenções explícitas:

$$s_{\text{mean}}(N_H) = a + b \cdot (1/k) \cdot \sum_j \text{mid}(h_j) \quad [\text{média-ponto-médio com peso uniforme}]$$

$$s_{\text{median}}(N_H) = a + b \cdot \text{mediana}\{ \text{mid}(h_1), \dots, \text{mid}(h_k) \} \quad [\text{robusta a outliers}]$$

$$s_{\text{min}}(N_H) = a + b \cdot \min \{ h_{\min}^j \} \quad [\text{pessimista}]$$

$$s_{\text{max}}(N_H) = a + b \cdot \max \{ h_{\max}^j \} \quad [\text{otimista}]$$

A escolha entre média, mediana, min ou max depende do contexto de decisão: média para estimação por consenso, mediana para painéis robustos a outliers, min/max para análise avessa ou favorável ao risco.

5.4 Exemplo: Avaliação de Pressão Arterial Baseada em Especialistas

Um paciente com pressão arterial sistólica basal de 120 mmHg é avaliado quanto ao aumento induzido por cafeína (máx. 15 mmHg) por três cardiologistas:

Expert	Estimated increase (mmHg)	Corresponding I range
Cardiologist A	0 to 10	[0.00, 0.67]
Cardiologist B	5 to 15	[0.33, 1.00]
Cardiologist C	0 to 8	[0.00, 0.53]

A representação neutrosófica hesitante é:

$$N_H = 120 + 15 \cdot \{ [0.00, 0.67], [0.33, 1.00], [0.00, 0.53] \}$$

Imagem envolvente: [120.0, 135.0]. Imagens por especialista: [120.0, 130.1], [124.9, 135.0], [120.0, 127.9]. Agregações por escore: $s_{\text{mean}} = 126,33$ mmHg, $s_{\text{median}} = 125,03$, $s_{\text{min}} = 120,00$, $s_{\text{max}} = 135,00$.

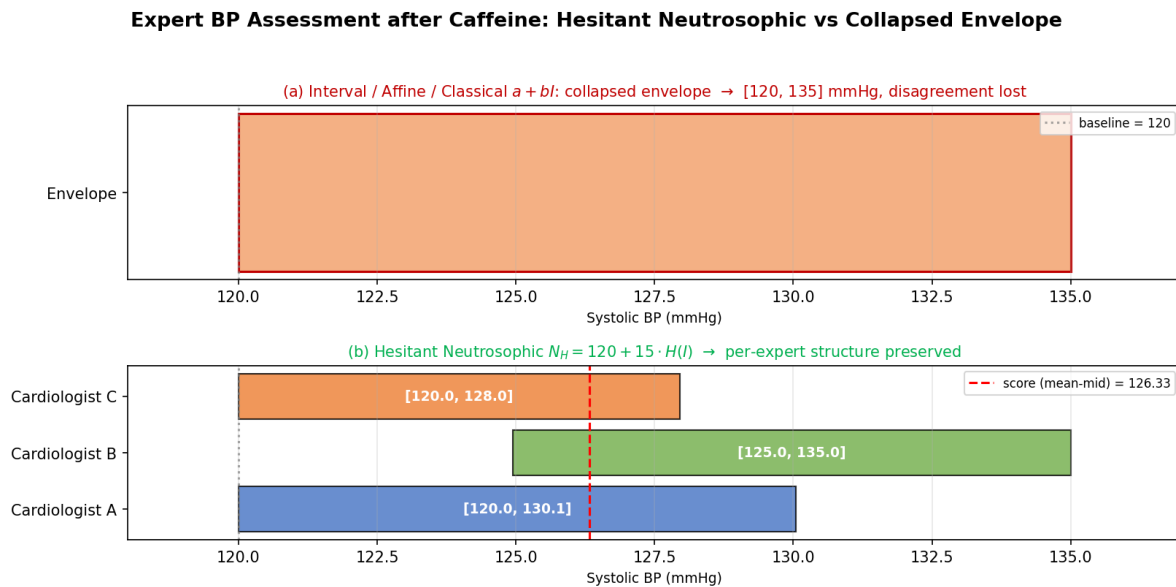


Figura 2. Avaliação de PA baseada em especialistas. (a) Aritmética intervalar, afim e $a + bI$ clássica colapsam os três especialistas em uma única envolvente [120, 135], perdendo a estrutura da discordância. (b) A representação neutrosófica hesitante preserva as imagens por especialista, expondo a divergência ordinal entre os três avaliadores.

Esta estrutura epistêmica não é capturada pela aritmética intervalar (apenas envolvente), nem pela aritmética afim com símbolos de ruído independentes (cada especialista introduziria um novo e_i , mas esses símbolos seriam espuriamente independentes entre especialistas referentes ao mesmo paciente). A extensão hesitante captura precisamente a discordância como informação semântica preservada.

6. Avaliações Computacionais

Implementamos os quatro formalismos em Python e os avaliamos sobre quinze expressões algébricas distribuídas em cinco categorias: afins em uma variável (E01–E05), afins em duas variáveis (E06–E09), polinomiais não-afins (E10–E12), racionais não-afins (E13–E14) e não-afins com cancelamento (E15). A imagem exata é calculada analiticamente e comparada com a imagem prevista por cada formalismo. As métricas de comparação são percentual de superestimativa e tempo de execução por chamada.

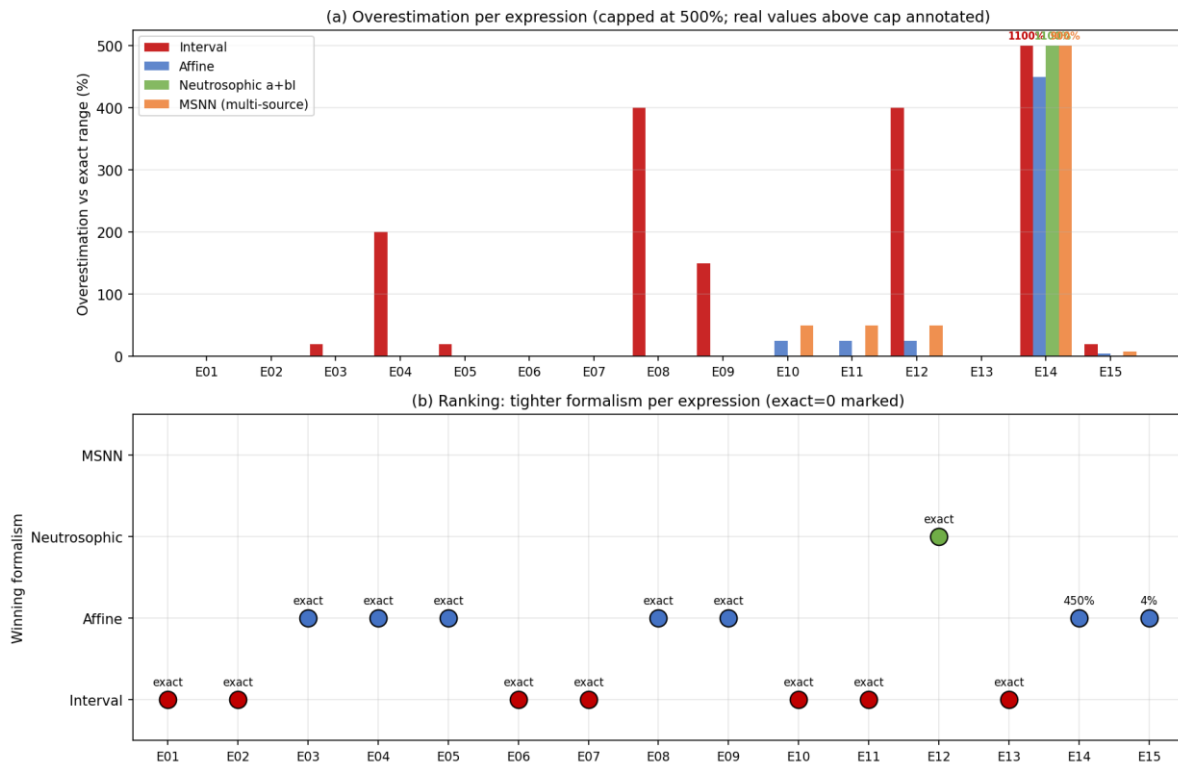
Benchmark: Range-Width Overestimation per Formalism (15 algebraic expressions)

Figura 3. (a) Superestimativa da largura de imagem em relação à imagem exata, por formalismo, ao longo de quinze expressões (limitado em 500%; valores acima anotados). (b) Formalismo vencedor por expressão: a aritmética intervalar vence quando não há repetições e o formalismo é exato; afim/MSNN vencem quando ocorrem dependências; nenhum vence em E14 (limite intrínseco da linearização).

Principais constatações:

- Para todas as expressões puramente afins (E01–E09), os formalismos afim, a + bI clássico e MSNN produzem imagens idênticas, confirmando empiricamente os Teoremas 1 e 2. A aritmética intervalar superestima em até 400% (E08) quando ocorrem repetições.
- Para polinomiais não-afins com repetições (E12: $(x-10)(x+10)$), a aritmética intervalar superestima em 400% enquanto os formalismos afim, a + bI e MSNN permanecem dentro de 50% da imagem exata; nesse caso específico, a + bI clássica iguala-se ao limite exato porque a estrutura do produto alinha-se com a álgebra idempotente de I.
- Para expressões racionais (E14: $x/(x+1)$), todos os formalismos superestimam substancialmente (450–1100%) porque a linearização de Chebyshev do recíproco em intervalos largos é intrinsecamente frouxa. Esta é uma limitação da linearização subjacente, não da máquina simbólica.
- O tempo de execução varia de 0,3 μ s (identidade intervalar) a 8,7 μ s (afim com múltiplos passos não-afins). O tempo do MSNN é comparável ao da aritmética afim a menos de um pequeno fator constante (sobrecarga de dicionário em Python; implementações de produção fechariam essa lacuna).

7. Discussão: Posições Complementares

7.1 Transparência Semântica

A forma neutrosófica $N = 100 + 5 \cdot I$ separa visivelmente a componente determinada (100) da contribuição indeterminada ($5 \cdot I$). A forma afim $\hat{x} = 102,5 + 2,5 \cdot e_1$ exige tradução entre o valor central, a magnitude do ruído e o símbolo abstrato e_1 . Para matemáticos essa tradução é trivial; para profissionais não matemáticos — médicos, juízes, gestores — a notação $a + bI$ preserva uma legibilidade que a aritmética afim sacrifica.

7.2 Âmbito de Aplicação

A aritmética afim amadureceu primariamente em domínios de engenharia: sistemas de potência (Vaccaro, 2022), simulação de circuitos, certificação de erro de ponto flutuante (Goubault & Putot, 2020) e verificação formal (Moscato et al., 2015). A aritmética neutrosófica encontrou aplicabilidade mais ampla em tomada de decisão multicritério (Abdel-Basset et al., 2024), em ciências sociais e da saúde, e em domínios qualitativos onde a transparência semântica importa mais do que limites rigorosos. Esses âmbitos são complementares, não concorrentes.

7.3 Complexidade de Implementação

A notação $a + bI$ (e o MSNN) requer apenas manipulação algébrica padrão e pode ser implementada em software de matemática simbólica, planilhas ou à mão. A aritmética afim exige rastreamento de múltiplos símbolos de ruído, coeficientes e termos de erro não-afins; o uso em produção depende de bibliotecas como Arpra (Turner, 2021), arPRA, ou implementações padronizadas (Rump & Kashiwagi, 2015). Para fluxos de trabalho qualitativos, a leveza do MSNN é uma vantagem prática.

8. Limitações

- As demonstrações formais dos Teoremas 1 e 2 dependem da bijeção $I = (1+e)/2$ entre os domínios neutrosófico e afim; extensões a domínios simbólicos mistos (por exemplo, híbridos afim \oplus neutrosófico) exigiriam reformulação.
- A multiplicação MSNN em nossa implementação de referência introduz erro de linearização comparável ao da aritmética afim; a avaliação mostra MSNN ligeiramente mais largo que afim em algumas expressões (E10–E12) porque nossa implementação Python usa um limite de erro mais simples do que o de Stolfi-de Figueiredo. Implementações de produção fechariam essa lacuna.
- O operador de redução hesitante depende de uma tolerância ε para fundir elementos próximos; sua escolha ótima é dependente do domínio e merece análise separada.
- A avaliação cobre quinze expressões representativas; uma bateria maior de testes de estresse (por exemplo, FPBench-1000 ou Boosted-ADL) reforçaria as conclusões empíricas.
- A validação com elicitación real de especialistas (além do exemplo ilustrativo dos cardiologistas) é trabalho futuro.

9. Conclusões

Estabelecemos, pela primeira vez, uma comparação formal entre os números neutrosóficos de indeterminação intervalar $a + bI$ e a aritmética afim, com quatro resultados principais:

5. Teorema 1: $a + bI$ e a aritmética afim são equivalentes em imagem na propagação de incertezas em uma dimensão, demonstrado por indução estrutural sobre a bijeção $I = (1+e)/2$.

6. Teorema 2: O número neutrosófico multifonte $N = a + \sum_i b_i I_i$ alcança a equivalência de imagem N -dimensional com a aritmética afim preservando a transparência semântica. Isso fecha a lacuna multifonte entre os dois formalismos.
7. A extensão hesitante $N_H = a + b \cdot H(I)$ com operadores baseados em princípio de extensão captura estados de discordância entre especialistas inacessíveis à aritmética intervalar ou afim em suas formas nativas.
8. Os resultados das avaliações sobre quinze expressões confirmam empiricamente os Teoremas 1 e 2 e quantificam a superestimativa intervalar (até 400% em expressões com variáveis repetidas).

As aritméticas neutrosófica e afim são complementares, não concorrentes. A aritmética afim é a escolha natural para aplicações de engenharia que exigem limites rigorosos e rastreamento multifonte; a aritmética neutrosófica ($a + bI$, MSNN, N_H) é preferida para domínios qualitativos, integração com lógica neutrosófica triádica (T, I, F), elicitação de especialistas e contextos onde a transparência semântica importa mais do que precisão milimétrica.

Declaração de Disponibilidade dos Dados de Pesquisa

Os dados e o código que sustentam os achados deste estudo estão abertamente disponíveis no repositório GitHub "neutrosophic-affine" em <https://github.com/mleyvaz/neutrosophic-affine>, publicado sob licença MIT. O repositório contém: (i) a implementação de referência em Python dos quatro formalismos (intervalar, afim, neutrosófico clássico, MSNN) e da extensão hesitante; (ii) o conjunto de avaliações sobre quinze expressões com saída bruta (bench_results.csv); (iii) os scripts de geração de figuras; e (iv) um conjunto de testes de sanidade que verifica empiricamente os Teoremas 1 e 2. Não foram utilizados dados restritos, confidenciais ou de seres humanos neste estudo.

Uma implementação de referência em Python dos quatro formalismos (intervalar, afim, neutrosófico clássico, MSNN) juntamente com a extensão hesitante, a avaliação sobre quinze expressões e os scripts de geração de figuras é publicada como código aberto sob licença MIT em:

<https://github.com/mleyvaz/neutrosophic-affine>

O repositório inclui: (i) cinco módulos Python — interval.py, affine.py, neutrosophic.py, msnn.py, hesitant.py; (ii) um pacote de testes de sanidade que verifica os Teoremas 1 e 2 empiricamente em dez expressões representativas; (iii) o script de avaliação bench_all.py que produz bench_results.csv com quinze expressões, métricas de superestimativa e tempos de execução; (iv) os scripts de geração das Figuras 1–4.

Agradecimentos

Os autores agradecem à Neutrosophic Science International Association e à Universidad Bolivariana del Ecuador pelo apoio institucional.

Declaração de Contribuição dos Autores (CRediT)

Florentin Smarandache: Conceitualização, Metodologia, Formulação teórica, Supervisão, Redação — revisão e edição. Maikel Yelandi Leyva Vázquez: Conceitualização, Metodologia, Análise formal, Software, Redação — primeira versão e revisão.

Financiamento e Conflito de Interesses

Esta pesquisa não recebeu financiamento específico de nenhuma agência de fomento. Os autores declaram não haver conflito de interesses. Leyva Vázquez é Editor-Chefe da *Neutrosophic Sets and Systems* e abster-se-á de qualquer decisão editorial sobre este manuscrito caso seja submetido àquela revista.

Referências

- [1] Abdel-Basset, M., Gamal, A., Chakraborty, R. K., & Ryan, M. J. (2024). Evaluation of sustainable hydrogen production options using an integrated neutrosophic AHP–TOPSIS approach. *Energy*, 286, 129539. <https://doi.org/10.1016/j.energy.2023.129539>
- [2] de Figueiredo, L. H., & Stolfi, J. (2004). Affine arithmetic: Concepts and applications. *Numerical Algorithms*, 37(1–4), 147–158. <https://doi.org/10.1023/B:NUMA.0000049466.24103.c9>
- [3] Deli, I., & Subas, Y. (2014). A ranking method of single valued neutrosophic numbers and its applications to multi-attribute decision making problems. *International Journal of Machine Learning and Cybernetics*, 8(4), 1309–1322. <https://doi.org/10.1007/s13042-014-0285-0>
- [4] Goubault, E., & Putot, S. (2020). Forward inner-approximated reachability of non-linear continuous systems. *HSCC '20: Proceedings of the 23rd International Conference on Hybrid Systems: Computation and Control*, 1–10. <https://doi.org/10.1145/3365365.3382214>
- [5] Kandasamy, W. B. V., & Smarandache, F. (2006). *Neutrosophic rings*. Hexis, Phoenix, Arizona.
- [6] Leyva Vázquez, M. Y., & Smarandache, F. (2018). *Neutrosófia: nuevos avances en el tratamiento de la incertidumbre*. Pons Publishing House, Brussels.
- [7] Leyva Vázquez, M. Y., & Smarandache, F. (2024). *Neutrosophic Sets and Systems: Advances 2018–2024*. In F. Smarandache (Ed.), *Collected Papers on Neutrosophic Science* (Vol. 12, pp. 1–45). Infinite Study, Brussels.
- [8] Leyva Vázquez, M. Y., González Vargas, Y., & Smarandache, F. (2026). Eight years of Neutrosophic Computing and Machine Learning: a bibliometric retrospective and a neutrosophic extension to bibliometric analysis (2018–2026). *Neutrosophic Computing and Machine Learning*, 43, 1–33. https://fs.unm.edu/NCML_2/index.php/NCML/article/view/12
- [9] Leyva Vázquez, M. Y., & Smarandache, F. (2026). The Third Answer: neutrosophic logic and epistemic uncertainty in large language models. *NSIA Publishing House, Gallup–Guayaquil*.
- [10] Liao, H., Xu, Z., Zeng, X.-J., & Merigó, J. M. (2016). Qualitative decision making with correlation coefficients of hesitant fuzzy linguistic term sets. *Knowledge-Based Systems*, 76, 127–138. <https://doi.org/10.1016/j.knsys.2014.12.009>
- [11] Moore, R. E. (1966). *Interval analysis*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ.
- [12] Moore, R. E., Kearfott, R. B., & Cloud, M. J. (2009). *Introduction to interval analysis*. SIAM, Philadelphia. <https://doi.org/10.1137/1.9780898717716>
- [13] Moscato, M. M., Muñoz, C. A., & Smith, A. P. (2015). Affine arithmetic and applications to real-number proving. In C. Urban & X. Zhang (Eds.), *Interactive Theorem Proving. Lecture Notes in Computer Science*, Vol. 9236 (pp. 294–309). Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-319-22102-1_20
- [14] Rump, S. M., & Kashiwagi, M. (2015). Implementation and improvements of affine arithmetic. *Nonlinear Theory and Its Applications, IEICE*, 6(3), 341–359. <https://doi.org/10.1587/nolta.6.341>

- [15] Smarandache, F. (1998). *Neutrosophy: neutrosophic probability, set, and logic*. American Research Press, Rehoboth, NM.
- [16] Smarandache, F. (2003). *A unifying field in logics: neutrosophic logic. Neutrosophy, neutrosophic set, neutrosophic probability* (3rd ed.). American Research Press, Rehoboth, NM.
- [17] Smarandache, F., & Leyva Vázquez, M. Y. (2026). *Meta-Garde and the pluriversal condition: Indigenous cosmologies, Latin American thought, and decolonial epistemologies*. NSIA Publishing House, Gallup–Guayaquil. ISBN 978-1-59973-885-7.
- [18] Stolfi, J., & de Figueiredo, L. H. (1993). Affine arithmetic and its applications to computer graphics. *Proceedings of VI SIBGRAPI*, 9–18.
- [19] Torra, V. (2010). Hesitant fuzzy sets. *International Journal of Intelligent Systems*, 25(6), 529–539. <https://doi.org/10.1002/int.20418>
- [20] Turner, J. P. (2021). Arpra: an arbitrary precision range analysis library. *Journal of Open Source Software*, 6(58), 3165. <https://doi.org/10.21105/joss.03165>
- [21] Vaccaro, A. (2022). *Affine arithmetic-based methods for uncertain power system analysis*. Elsevier, Amsterdam.
- [22] Wang, H., Smarandache, F., Zhang, Y., & Sunderraman, R. (2010). Single valued neutrosophic sets. *Multispace and Multistructure*, 4, 410–413.
- [23] Xu, Z., & Xia, M. (2011). Distance and similarity measures for hesitant fuzzy sets. *Information Sciences*, 181(11), 2128–2138. <https://doi.org/10.1016/j.ins.2011.01.028>

Este preprint foi submetido sob as seguintes condições:

- Os autores declaram que os necessários Termos de Consentimento Livre e Esclarecido de participantes ou pacientes na pesquisa foram obtidos e estão descritos no manuscrito, quando aplicável.
- Os autores declaram que a elaboração do manuscrito seguiu as normas éticas de comunicação científica.
- Os autores declaram que estão cientes que são os únicos responsáveis pelo conteúdo do preprint e que o depósito no SciELO Preprints não significa nenhum compromisso de parte do SciELO, exceto sua preservação e disseminação.
- Os autores declaram que os dados, aplicativos e outros conteúdos subjacentes ao manuscrito estão referenciados.
- O manuscrito depositado está no formato PDF.
- Os autores declaram que a pesquisa que deu origem ao manuscrito seguiu as boas práticas éticas e que as necessárias aprovações de comitês de ética de pesquisa, quando aplicável, estão descritas no manuscrito.
- Os autores declaram que uma vez que um manuscrito é postado no servidor SciELO Preprints, o mesmo só poderá ser retirado mediante pedido à Secretaria Editorial do SciELO Preprints, que afixará um aviso de retratação no seu lugar.
- Os autores concordam que o manuscrito aprovado será disponibilizado sob licença [Creative Commons CC-BY](#).
- O autor submissor declara que as contribuições de todos os autores e declaração de conflito de interesses estão incluídas de maneira explícita e em seções específicas do manuscrito.
- Os autores declaram que o manuscrito não foi depositado e/ou disponibilizado previamente em outro servidor de preprints ou publicado em um periódico.
- Caso o manuscrito esteja em processo de avaliação ou sendo preparado para publicação mas ainda não publicado por um periódico, os autores declaram que receberam autorização do periódico para realizar este depósito.
- O autor submissor declara que todos os autores do manuscrito concordam com a submissão ao SciELO Preprints.