Estado de la publicación: El preprint no ha sido enviado para publicación

LA CONJETURA DE GOLDBACH DESDE LA PERSPECTIVA DE LOS FACTORES PRIMOS IMPARES DE UN NÚMERO PAR

Imanol Urcola

https://doi.org/10.1590/SciELOPreprints.15061

Envíado en: 2026-02-06
Postado en: 2026-02-09 (versión 1)
(AAAA-MM-DD)

LA CONJETURA DE GOLDBACH DESDE LA PERSPECTIVA DE LOS FACTORES PRIMOS IMPARES DE UN NÚMERO PAR

GOLDBACH'S CONJECTURE FROM THE PERSPECTIVE OF THE ODD PRIME FACTORS OF AN EVEN NUMBER

Imanol Urcola

Investigador independiente, sin afiliación. Barcelona, Cataluña, España

ORCID: https://orcid.org/0009-0002-7999-103X

ABSTRACT

In this article, Goldbach's Strong Conjecture has been investigated. Starting from an even number *N* greater than 4 and not of the form "two times a prime," a general notation has been defined to differentiate between odd prime factors of *N* and all the other odd primes smaller than *N*, which has allowed operating with them separately. Based on logical arithmetic steps with these two types of primes, two theorems have been postulated that prove that only the odd primes that are not prime factors of *N* can satisfy Goldbach's Conjecture for *N*. Finally, a method based on the sieve of Eratosthenes has been described for generating a list of odd numbers smaller than *N* using only the odd prime numbers smaller than $\sqrt{N}$. Such a list has been generated for a known even number that does satisfy the Goldbach's Conjecture. It has been concluded from this example and the theorems previously stated that such a list generated for an even number that does not satisfy the Goldbach's Conjecture must necessarily include all odd numbers smaller than *N*, which would be impossible, as it would be incompatible with the natural distribution of numbers.

Keywords: Goldbach's Conjecture, sieve of Eratosthenes, prime factors, list of numbers

RESUMEN

En este trabajo se ha investigado la Conjetura Fuerte de Goldbach. Partiendo de un número par *N* mayor que 4 y que no es de la forma "dos por un primo", se ha definido una notación general para diferenciar entre los factores primos impares de N y todos los demás primos impares menores que N, permitiendo diferenciarlos a la hora de operar con ellos. Mediante operaciones aritméticas lógicas hechas con ambos tipos de primos, se han postulado dos teoremas que demuestran que sólo los números primos impares que no son factores primos de N pueden cumplir la Conjetura de Goldbach para N. Finalmente, se detalla un método basado en la criba de Eratóstenes para generar una lista de números impares menores que N utilizando sólo los primos menores que $\sqrt{N}$; y se crea dicha lista para un número par conocido que sí cumple la Conjetura de Goldbach. De este ejemplo y de los teoremas previamente planteados se llega a la conclusión que una lista así generada con un número par que no cumpliera la Conjetura de Goldbach debería incluir todos los números impares menores que N, lo cual sería imposible porque sería incompatible con la distribución natural de los números.

Palabras clave: Conjetura de Goldbach, criba de Eratóstenes, factores primos, listado de números

1. INTRODUCCIÓN

La Conjetura Fuerte de Goldbach, o Conjetura de Goldbach a secas, dice que todo número par mayor que dos se puede escribir como la suma de dos números primos. La conjetura data de 1.742 y fue planteada en una carta de Goldbach dirigida a Euler. Sigue siendo a día de hoy uno de los problemas abiertos más antiguos de las matemáticas [1]. Ha sido ampliamente estudiada por grandes teóricos numéricos, como Hardy, el cual desarrolló junto con Littlewood el método del círculo Hardy-Littlewood [2], una de las herramientas más importantes en teoría de números analítica y ampliamente utilizada en el estudio de la conjetura. Por ejemplo, fue usada por Vinogradov en la demostración de su teorema de 1.937, que dice que todo número impar suficientemente grande (mayor que la constante que lleva su nombre) se puede escribir como la suma de 3 primos [3]. Esto significó un importante avance en la Conjetura Débil de Goldbach, la cual afirma que todo número impar mayor que 5 se puede poner como la suma de tres primos. De hecho, la Conjetura Débil fue finalmente demostrada por Helfgott en 2013; quien desarrollo para esta demostración técnicas derivadas del círculo de Hardy-Littlewood, entre otros métodos [4].

En cuanto a la Conjetura Fuerte, los avances más importantes probablemente sean las aportaciones del matemático chino Chen Jingrun, quien demostró que todo número par suficiente mente grande es la suma de dos primos o un primo y un semiprimo [5, 6, 7].

Aunque a día de hoy la conjetura sigue sin estar demostrada, la gran mayoría de matemáticos cree que es cierta, ya que, además de todos los avances mencionados hasta ahora, la distribución de los números primos que viene dado por el Teorema de los Números Primos apunta a que es cierta [8]. Otros trabajos también han estudiado esta distribución y su relación con la Conjetura de Goldbach [9]. Para finalizar, además de todo lo anterior, se ha demostrado que la conjetura es cierta hasta números del orden de 10^{18}. No obstante, ninguno de los trabajos anteriormente mencionados demuestra completamente que la conjetura sea cierta.

2. NOTACIÓN Y DEFINICIONES

Sea $N \in \mathbb{N}$ un número par mayor que 4 y no de la forma "un número primo impar multiplicado por dos". Utilizaremos la letra p para denotar los factores primos impares de N. Para diferenciar entre sí los distintos factores primos impares, asignaremos a cada uno un número. Así, el primer factor primo impar de N será p_1, el segundo será p_2, y así sucesivamente. Utilizaremos z para indicar el número total de factores primos impares de N, de manera que denotaremos p_z su z-ésimo factor primo impar, al mayor de todos. El 2, el factor primo común entre todos los números pares, lo expresaremos siempre tal cual. Los números pares mayores que 4 y de la forma "un número primo impar multiplicado por dos", no los analizaremos en este trabajo puesto que todos ellos cumplen la Conjetura de Goldbach (ver demostración Corolario 1). La pregunta es si todos los pares N la cumplen.

Ejemplo 1: factores primos de N representados según la notación de este trabajo.

$$Factores\ Primos(N) = \{2, p_1, p_2, p_3, \ldots, p_{z-2}, p_{z-1}, p_z\}$$

Definición 2.1: definimos como "secuencia de N" al conjunto formado por todos los números naturales desde 1 hasta N-1, ambos incluidos.

Además de sus primos p, en la secuencia de N podemos encontrar otros números primos impares que no son factores primos suyos. También existen los pares N que no tienen factores primos impares, como las potencias de dos. Para denotar todos los números primos de la secuencia de N que no son factores primos impares suyos, utilizaremos la letra q. De esta manera, igual que hemos hecho con los factores primos impares, podemos asignar un número a cada primo q; y así tener q_1, q_2… hasta el último primo q de la secuencia de N, el más grande, al que denotaremos q_z.

p = factor primo impar de N.

q = número primo impar de la secuencia de N y que no es factor primo de N.

También podemos encontrar números impares compuestos en la secuencia de todo N. Nos referiremos a los números impares compuestos cuyos factores primos sean únicamente primos p de N como números impares compuestos tipo pp. A su vez, a los impares compuestos por factores primos p y q los llamaremos impares tipo pq. Finalmente, los impares tipo qq serán aquellos cuyos factores primos sean únicamente del tipo q de N.

Mediante estas reglas de nomenclatura podemos ordenar y diferenciar todos los primos de la secuencia de N en función de si dividen o no a N. También podemos ordenar y diferenciar los impares compuestos derivados de estos primos. Todo ello nos servirá más adelante para deducir propiedades generales de los primos p y q y entender su relevancia en la Conjetura de Goldbach.

Definición 2.2: decimos que dos números naturales de la secuencia de N son "números complementarios" cuando la suma de ambos da N. Es decir, los números complementarios son todas aquellas parejas formadas por un número y N menos ese número. Utilizaremos el signo "↔"para indicar que dos números de la secuencia de N son complementarios.

En función de si el número complementario de otro número es primo o compuesto, hablaremos de un "primo complementario" o un "complementario compuesto", respectivamente. Y esto nos ayudará a identificar de qué tipo son los números complementarios de los primos p y q de la secuencia de cualquier número N, lo que nos ayudará a abordar más fácilmente la Conjetura de Goldbach. A partir de las definiciones dadas, podemos formular la Hipótesis de Trabajo:

HIPÓTESIS: si Conjetura de Goldbach es cierta, entonces en la secuencia de todos los pares mayores que 2 encontraremos al menos una pareja de números complementarios primos.

3. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

TEOREMA 1: todo factor primo p de N tiene un número complementario compuesto y múltiplo impar de p.

Demostración: cojamos un número par N como el del Ejemplo 1. Como primer paso, descomponemos N en sus factores primos utilizando la notación que hemos definido en el apartado anterior.

(1)

$$N = 2 * p_1 * p_2 * p_3 * \ldots * p_{z-1} * \ p_z$$

El siguiente paso lo podemos realizar con cualquiera de los factores primos impares de N. Cogemos, por ejemplo, p_z y calculamos su número complementario. Para ello, basta con restar p_z a N. Fijémonos en que, al tener N descompuesto en sus factores primos, podemos fácilmente extraer p_z como factor común en ambos términos de la resta.

(2)

$$2 * p_1 * p_2 * p_3 * \ldots * p_{z-1} * \ p_z - p_z \ \Rightarrow \ p_z(2 * p_1 * p_2 * p_3 * \ldots * \ p_{z-1} - 1)$$

Hemos obtenido como resultado p_z multiplicado a un número impar. Es decir, el número complementario de p_z es precisamente un múltiplo impar de p_z. Y, como hemos dicho, podemos repetir el mismo procedimiento con cualquier factor primo p de N, y su número complementario será siempre un múltiplo impar suyo.

COROLARIO 1: todos los múltiplos impares de p tendrán números complementarios compuestos que serán, a su vez, múltiplos impares de p.

Demostración: se deriva aplicando la misma lógica del Teorema 1. Utilizaremos el par N de la expresión (1) y cogeremos otra vez el número p_z como ejemplo. Multiplicaremos p_z por un número impar de manera que obtendremos un número compuesto dentro de la secuencia de N. Analizaremos dos casos diferentes; uno en el que multiplicaremos p_z por un factor primo p y otro en el que lo multiplicaremos por un primo q, y veremos que en ambos casos el resultado es el mismo.

CASO 1: p_z multiplicado por otro factor primo de N.

Usaremos como ejemplo el número p_1p_z. Podemos calcular los números complementarios de ambos factores primos simplemente restando p_1p_z a N y extrayendo los factores comunes:

(3)

$$2 * p_1 * p_2 * p_3 * \ldots * p_{z-1} * \ p_z - p_1 * p_z \ \Rightarrow p_1 * p_z(2 * p_2 * p_3 * \ldots * \ p_{z-1} - 1) \ \Rightarrow$$
$$p_z(2 * p_1 * p_2 * p_3 * \ldots * \ p_{z-1} - p_1) \ \ y \ \ p_1(2 * p_2 * p_3 * \ldots * \ p_z - p_z)$$

CASO 2: p_z multiplicado por un número primo q.

En este caso, el resultado es exactamente el mismo, el número complementario de p_z seguirá siendo un múltiplo de p_z.

(4)

$$2 * p_1 * p_2 * p_3 * \ldots * p_{z-1} * \ p_z - p_z * q \Rightarrow \ p_z(2 * p_1 * p_2 * p_3 * \ldots * \ p_{z-1} - q)$$

Del Teorema 1 y Corolario 1 podemos extraer que un primo p de N, es decir, un factor primo impar suyo, nunca sumará N con otro número primo. Por tanto, los factores primos impares de N nunca podrán cumplir la Conjetura de Goldbach para N. Esto no ocurre con los pares tipo “un número primo impar multiplicado por dos”. En estos números, su factor primo impar siempre sumará el número par consigo mismo, cumpliendo así la conjetura.

En definitiva, si queremos saber si un número par N cumple la Conjetura de Goldbach, hay que buscar siempre entre sus primos q.

TEOREMA 2: un número primo q de la secuencia de N sólo puede tener tres tipos de números complementario: el 1, un coprimo q, o un número compuesto qq coprimo.

Demostración: del Teorema 1 y Corolario 1 se deduce por eliminación que ningún primo q puede tener un número complementario que sea p, pp o pq. Por tanto, los números complementarios de los primos q sólo pueden ser el 1, otro número q o un número qq. Sólo quedaría la duda de si el complementario de un primo q puede ser un múltiplo suyo.

Dado un primo q_x de la secuencia de N, asumiremos que su número complementario es múltiplo de q_x. Como ese número complementario debe ser de la forma qq, asumiremos que q_x multiplica, por ejemplo, a q_1. De manera que:

(5)

$$2 * p_1 * p_2 * p_3 * \ldots * p_{z-1} * p_z \ - q_x = q_1 * q_x$$

Para conocer el valor de q_1, podemos dividir entre q_x a cada lado de la igualdad:

(6)

$$\frac{2 * p_1 * p_2 * p_3 * \dots * p_{z-1} * p_z}{q_x} - \frac{q_x}{q_x} = \frac{q_1 * q_x}{q_x}$$

$$\frac{2 * p_1 * p_2 * p_3 * \dots * p_{z-1} * p_z}{q_x} - 1 = q_1$$

La fracción a la izquierda de la igualdad en la expresión (6) debe dar un número entero, y esto sólo podría suceder si q_x fuera un factor primo de *N*. Pero por definición no lo es y, por tanto, es imposible que el número complementario de q_x sea un múltiplo suyo, quedando demostrado el Teorema 2.

La conclusión que podemos extraer de estos dos teoremas es que la Conjetura de Goldbach no tiene relación alguna con la cantidad de primos *q* o la cantidad total de primos de la secuencia de un número par *N*. El hecho de que un primo dado sea del tipo *p* o *q* depende única y exclusivamente del número par *N* que analizamos. Cada primo será del tipo *p* o *q* dependiendo de *N*.

Los dos teoremas que hemos formulado nos están indicando la relación de la Conjetura de Goldbach con la divisibilidad de los números pares. Al fin y al cabo, los factores primos de un número nos indican en cuántas partes iguales podemos dividir ese número. Es justamente por eso por lo que un factor primo *p* de *N* siempre sumará *N* con un múltiplo impar suyo. Y lo mismo ocurre con los múltiplos impares de *p*, ya sean tipo *pp* o *pq*, siempre sumarán *N* con otro múltiplo de *p*. En cambio, no ocurre lo mismo con los primos *q*. Como no dividen *N* en partes iguales, siempre dejan resto, un primo *q* nunca sumará *N* con un múltiplo suyo. Como veremos más adelante, todo esto tiene relación con la distribución misma de los números naturales.

Si la Conjetura de Goldbach es cierta, debe ser porque es una propiedad emergente de la propia distribución de los números primos. La única manera de que un número par *N* no cumpla la Conjetura de Goldbach es que todos y cada uno de sus primos *q* tengan números complementarios compuestos *qq* coprimos (y el 1 tiene que tener como número complementario un número *q* o *qq*).

4. MÉTODO DE LA LISTA Y CONCLUSIONES

Para intentar demostrar la Conjetura de Goldbach para los números pares tipo N, vamos a plantear una serie de pasos para generar una lista de números de la secuencia de N que incluya:

1) El 1
2) Todos los primos impares (tanto p como q) menores que $\sqrt{N}$
3) Todos los múltiplos impares de los primos impares menores que $\sqrt{N}$
4) Todos los números complementarios de los números mencionados en los puntos anteriores.

El hecho de utilizar $\sqrt{N}$ como punto de corte se debe al método de la criba de Eratóstenes. Gracias a este método, sabemos que todos los números compuestos impares menores que N tienen al menos un factor primo menor que $\sqrt{N}$ [10].

Construiremos una lista utilizando como ejemplo un par N conocido. Este ejemplo nos servirá para deducir las propiedades que tendría una lista similar generada para un hipotético par N que no cumpliera la Conjetura de Goldbach. Para abreviar, utilizaremos la letra G para referirnos a ese número que no cumple la Conjetura de Goldbach. De acuerdo con los Teoremas 1 y 2, todos los primos q de la secuencia de G deben tener números complementarios qq coprimos (y el 1 a su vez debe también tendrá un número complementario q o qq).

El ejemplo que utilizaremos para crear la lista es el número 128, y se puede observar el resultado final en la Tabla 1 en la página 12. Este número es pequeño y fácil de manejar y resulta muy apropiado por dos motivos:

- No tiene ningún primo p, todos los primos de su secuencia son tipo q, lo que incrementa las combinaciones posibles qq y el número de parejas de complementarios $q \leftrightarrow qq$.
- Todos los números complementarios de los primos q menores que $\sqrt{128}$ (es decir, 3, 5, 7 y 11) son compuestos qq. Esta característica es fundamental, ya que también la cumpliría el número G.

El método de la lista se basa en el conocimiento previo de todos los números de la secuencia de N. Es decir, no es un método para predecir las posiciones de los primos q o ningún otro número de la secuencia. Pero nos permitirá conocer la forma de los primos q que tienen números complementarios *qq*, lo cual nos ayudará en la demostración. Construiremos la lista de números siguiendo una serie de pasos:

Paso 1: introducir en la lista el 1 y su número complementario.

Estos números no tienen ningún interés en el contexto de la Conjetura de Goldbach, pero es importante que estén dentro de la lista, como veremos más adelante. Los incluiremos al inicio de la lista (Tabla 1), al lado de unas fórmulas que deduciremos en pasos siguientes.

Paso 2: para cada primo impar menor que $\sqrt{N}$, determinar si su número complementario es un número compuesto.

Tanto en el caso de 128 como de un hipotético *G*, todos los primos impares menores que $\sqrt{N}$ tienen números complementarios compuestos. En 128, tenemos las parejas 3 ↔ 125, 5 ↔ 123, 7 ↔ 121 y 11 ↔ 117.

Paso 3: para cada primo impar menor que $\sqrt{N}$ que tenga un número complementario compuesto, determinar el factor primo menor que $\sqrt{N}$ de ese número complementario. Este factor primo será del tipo *p* o *q* de *N*, y le llamaremos “primo asociado”. De este modo, cada primo impar menor que $\sqrt{N}$ que tenga un número complementario compuesto tendrá un primo asociado que también será menor que $\sqrt{N}$. Siempre asignaremos un único primo asociado por número, el más pequeño de todos.

En el caso de un primo *p* menor que $\sqrt{N}$, su primo asociado siempre será el propio *p*, como se deduce del Teorema 1. Pero en los primos *q* menores que $\sqrt{N}$ con números complementarios *qq* el primo asociado será siempre un coprimo *q*. En 128, el primo asociado de 3 es 5 ($125 = 5^3$), el de 5 es 3 ($123 = 3x41$), el de 7 es 11 ($121 = 11^2$) y el de 11 es otra vez 3 ($117 = 3x39$). Los primos asociados son de gran importancia porque nos indican la distribución de todos los múltiplos impares de los primos menores que $\sqrt{N}$ de la secuencia de *N*. Gracias a ellos, sabemos dónde empiezan y donde acaban los múltiplos de un primo dado menor que $\sqrt{N}$.

De existir, observaríamos una cosa similar en todos los primos *q* menores que $\sqrt{G}$, cada uno de ellos tendría un coprimo *q* asociado, igual que 128.

Paso 4: utilizando los primos impares menores que $\sqrt{N}$ y sus asociados, determinar las fórmulas que describen los números complementarios de todos los compuestos impares de la secuencia de *N*.

Volviendo al ejemplo del 128, cogemos el 3 y su primo asociado. Sólo conociendo estos dos números, podemos determinar qué otros números de la secuencia de 128 tendrán números complementarios correspondientes a múltiplos impares de 5. Para ello, basta con sumar múltiplos pares de 5 al número 3. Haciendo esto, el complementario del número que obtenemos será 125 menos el múltiplo par de 5 que hemos utilizado, es decir, otro múltiplo impar de 5. Por ejemplo, si sumamos *2x5* a 3, obtenemos $3 + 2x5 = 13 \leftrightarrow 115 = 5x23$.

Esta conexión de primos asociados nos permite describir unas fórmulas generales que conecten todos los primos menores que $\sqrt{N}$ y todos sus múltiplos impares con sus números complementarios correspondientes. Haciendo la distinción entre primos tipo p y q, estas fórmulas quedaría así:

(7)

$$p + 2(pk) \leftrightarrow pj \qquad y \qquad q_x + 2(q_y k) \leftrightarrow q_y j$$

Donde:

$k \in \mathbb{N}$ y $k \geq 0$

$j \in \mathbb{N}$ es un número impar ≥ 1

p es un factor primo impar de N y menor que $\sqrt{N}$

$q_x \neq q_y$ son dos primos impares diferentes menores que $\sqrt{N}$ y no son factores primos de N

Si aplicamos estas fórmulas a 128, obtenemos lo siguiente: $3 + 2(5k) \leftrightarrow 5j$; $5 + 2(3k) \leftrightarrow 3j$; $7 + 2(11k) \leftrightarrow 11j$ y $11 + 2(3k) \leftrightarrow 3j$.

Estas fórmulas tienen dos expresiones bien diferenciadas. Por un lado, tenemos una expresión tipo "un número primo más un número par", y por otro "un múltiplo impar de un primo". Para que la lista que estamos creando esté completa, es fundamental que incluyamos números de ambos tipos de expresiones generados con cada primo impar menor que $\sqrt{N}$. Esto es crítico para los primos q menores que $\sqrt{N}$. Si cogemos por ejemplo q_x, es necesario tener un listado completo de números de la forma $q_x + 2(q_y k)$ (empezando desde $k = 0$) y también de la forma $q_x j$ (hasta llegar a $j = 1$). Sólo así podemos estar seguros de que la lista incluirá todos los primos q menores que $\sqrt{N}$, todos sus múltiplos impares y todos sus números complementarios correspondientes. Además, hay que tener en cuenta que encontraremos pares N donde alguno de sus primos q menores que $\sqrt{N}$ no será un primo asociado de otro.

Así, si imaginamos que q_x no es el primo asociado de ningún otro primo, con las fórmulas que hemos definido no podríamos obtener un listado de números tipo q_xj completo. En un caso así, asociaríamos q_x al número impar compuesto más pequeño que sea posible y generaríamos una fórmula a partir de este. A pesar de asociar q_x a un compuesto, como este sería un múltiplo de un primo impar menor que $\sqrt{N}$, la nueva fórmula aún nos serviría para relacionar entre sí dos primos q menores que $\sqrt{N}$.

Esto mismo le ocurre a 128. En el 128 no hay ningún primo menor que $\sqrt{128}$ cuyo primo asociado sea 7, con lo que no podemos generar un listado de números tipo $7j$ completo. Para generar estos números, debemos buscar el número impar más pequeño de la secuencia de 128 que tenga un múltiplo impar de 7 como número complementario y que no tenga ningún otro primo impar más pequeño. En este caso, ese número es 9 ($9 \leftrightarrow 119 = 7x17$), y a partir de él y el 7 podemos describir la siguiente fórmula: $9 + 2(7k) \leftrightarrow 7j$. Esta fórmula no es exactamente del tipo $q_x + 2(q_yk)$, sería un derivado tipo $q_xq_x + 2(q_yk) \leftrightarrow q_yj$; pero sirve para relacionar entre sí dos primos impares menores que $\sqrt{128}$.

De esta manera, ya tenemos todas las fórmulas que necesitamos para generar la lista de números de 128 (Tabla 1). Lo bueno de generar la lista a partir de las fórmulas es que nos permite conocer qué forma tienen los números complementarios de todos los impares compuestos de la secuencia de N. Todos ellos estarán descritos de la forma "un primo menor que $\sqrt{N}$ (o un múltiplo impar de uno, si usamos un qq) + dos por un múltiplo de un primo menor que $\sqrt{N}$". Desde el punto de vista de la conjetura, nos permite conocer las formas de todos los primos q que tienen un número complementario qq (en negrita y subrayados en la Tabla 1).

La Tabla 1, como hemos dicho al principio, contiene el 1, todos los primos menores que $\sqrt{128}$, todos sus múltiplos impares y todos los números complementarios de estos. Por lógica, pensemos que cualquier otro número impar de la secuencia de 128 que no aparezca en esta lista no puede ser compuesto, ya que todos los impares compuestos están en la lista. Y, por este mismo motivo, tampoco puede tener un número complementario compuesto. Es decir, todos los números que quedan fuera de esta lista son primos q y confirman que 128 cumple la Conjetura de Goldbach. Estos números son 19 ↔ 109, 31 ↔ 97 y 61 ↔ 67. Esta propiedad de los números impares que quedan fuera de la lista la podemos extender a cualquier número N, ya que los pasos que se dan para generar la lista son exactamente los mismos por muy diferentes, grandes o complejas que puedan ser estas listas.

Supongamos ahora que generamos una lista así para el número G, siguiendo los mismos pasos y aplicando las fórmulas correspondientes. Como todos los primos de la secuencia de G tienen números complementarios compuestos, incluidos todos sus primos q, todos ellos deben aparecer en la lista. Eso quiere decir que no puede haber ningún otro número impar de la secuencia de G fuera de la lista. De haberlo, este sería un primo q con un número complementario coprimo q, y hemos dicho que G no cumple la Conjetura de Goldbach. Sería una contradicción.

Tabla 1: lista generada con los primos menores que √128 indicando las fórmulas utilizadas. Los primos q con números complementarios qq están resaltados en negrita y subrayados.

$N = 128$ (2^7)

Primos q: 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109, 113, 127

*1 ↔ **127***	*3 + 2(5k) ↔ 5j*	*5 + 2(3k) ↔ 3j*	*7 + 2(11k) ↔ 11j*	*11 + 2(3k) ↔ 3j*	*9 + 2(7k) ↔ 7j*
k = 0	**3** ↔ 125	**5** ↔ 123	**7** ↔ 121	**11** ↔ 117	9 ↔ 119
k = 1	3 + 2(5) = **13** ↔115	5 + 2(3) = 11 ↔ 117	7 + 2(11) = **29** ↔ 99	11 + 2(3) = **17** ↔ 111	9 + 2(7) = **23** ↔ 105
k = 2	3 + 2(10) = **23** ↔ 105	5 + 2(6) = **17** ↔ 111	7 + 2(22) = 51 ↔ 77	11 + 2(6) = **23** ↔ 105	9 + 2(14) = **37** ↔ 91
k = 3	3 + 2(15) = 33 ↔ 95	5 + 2(9) = **23** ↔ 105	7 + 2(33) = **73** ↔ 55	11 + 2(9) = **29** ↔ 99	9 + 2(21) = 51 ↔ 77
k = 4	3 + 2(20) = **43** ↔ 85	5 + 2(12) = **29** ↔ 99	7 + 2(44) = 95 ↔ 33	11 + 2(12) = 35 ↔ 93	9 + 2(28) = 65 ↔ 63
k = 5	3 + 2(25) = **53** ↔ 75	5 + 2(15) = 35 ↔ 93	7 + 2(55) = 117 ↔ 11	11 + 2(15) = **41** ↔ 87	9 + 2(35) = **79** ↔ 49
k = 6	3 + 2(30) = 63 ↔ 65	5 + 2(18) = 41 ↔ 87		11 + 2(18) = **47** ↔ 81	9 + 2(42) = 93 ↔ 35
k = 7	3 + 2(35) = **73** ↔ 55	5 + 2(21) = **47** ↔ 81		11 + 2(21) = **53** ↔ 75	9 + 2(49) = **107** ↔ 21
k = 8	3 + 2(40) = **83** ↔ 45	5 + 2(24) = **53** ↔ 75		11 + 2(24) = **59** ↔ 69	9 + 2(56) = 121 ↔ 7
k = 9	3 + 2(45) = 93 ↔ 35	5 + 2(27) = **59** ↔ 69		11 + 2(27) = 65 ↔ 63	
k = 10	3 + 2(50) = **103** ↔ 25	5 + 2(30) = 65 ↔ 63		11 + 2(30) = **71** ↔ 57	
k = 11	3 + 2(55) = **113** ↔ 15	5 + 2(33) = **71** ↔57		11 + 2(33) = 77 ↔ 51	
k = 12	3 + 2(60) = 123 ↔ 5	5 + 2(36) = 77 ↔ 51		11 + 2(36) = **83** ↔ 45	
k = 13		5 + 2(39) = **83** ↔ 45		11 + 2(39) = **89** ↔ 39	
k = 14		5 + 2(42) = **89** ↔ 39		11 + 2(42) = 95 ↔ 33	
k = 15		5 + 2(45) = 95 ↔ 33		11 + 2(45) = **101** ↔ 27	
k = 16		5 + 2(48) = **101** ↔ 27		11 + 2(48) = **107** ↔ 21	
k = 17		5 + 2(51) = **107** ↔ 21		11 + 2(51) = **113** ↔ 15	
k = 18		5 + 2(54) = **113** ↔ 15		11 + 2(54) = 119 ↔ 9	
k = 19		5 + 2(57) = 119 ↔ 9			
k = 20		5 + 2(60) = 125 ↔ 3			

Entonces, todos y cada uno de los números impares entre 1 y *G-1* deben estar en la lista. Esto reduce toda la complejidad de la Conjetura de Goldbach a determinar si es posible generar todos los números impares (salvo el 1 y su complementario) de la secuencia de un par *N* únicamente a partir de sus primos impares menores que √*N*; ya que todos los números de la lista se generan a partir de estos primos.

Pensemos en la forma que tienen estos números: tenemos los primos menores que √*N* (tanto *p* como *q*), sus múltiplos impares (*pj* y *qj*) y los números complementarios de estos; que en el caso de los primos *p* son de la forma $p + 2(pk)$ y en el de los primos *q* de la forma $q_x + 2(q_y k)$ o derivada (véase el ejemplo de 9 y 7 para 128). Si analizamos las fórmulas, vemos que todos los números de la lista son el resultado de sumar a un primo menor que √*N* un múltiplo par suyo (en los primo *p*) o un múltiplo par de otro primo menor que √*N* (en los primos *q* y derivados); sólo un primo más de todos los que puede haber en la secuencia de *N*. ¿Es posible generar así sólo con estos primos menores que √*N* todos los números impares de la secuencia de *N*?

La respuesta es no, sencillamente por las limitaciones que tiene este método de la lista. Al menos de manera directa, el método no genera números impares sumando múltiplos pares de otros primos; por ejemplo, primos no asociados o primos mayores que √*N*. Y mucho menos sumando potencias de dos. Todo esto no quiere decir que en los números de la lista estas combinaciones no puedan estar implícitas. Hay muchos ejemplos de estas combinaciones implícitas en la lista del 128; sin ir más lejos, 5, 7 y 11 son cada uno de la forma $3 + 2^n$. Pero, a pesar de que existan combinaciones implícitas, la lista que generemos con cualquier número par *N* nunca podrá incluir todos los impares de la secuencia de *N*.

Si pensamos en lo que supondría que una lista generada con este método incluyera todos los números impares de la secuencia de *N*, enseguida nos encontramos con absurdos. Por ejemplo, si la lista realmente incluyera todos los impares, podríamos intercambiar entre sí los números primos y sus asociados. Supongamos que, al igual que en 128, tenemos un número *G* donde el 5 es el primo asociado de 3. Ahora, en vez de usar la fórmula $3 + 2(5k)$, podríamos usar una fórmula con otro primo menor que √*G*, por ejemplo el 7. Obtendríamos así la fórmula $3 + 2(7k)$. Al dar distintos valores a *k* y calcular el resultado, deberíamos obtener siempre un número impar que ya pertenece a la lista; nunca uno distinto, porque la lista ya contiene todos los impares menores que *G*. Podríamos también sumar a 3 múltiplos pares de otros primos distintos a su primo asociado, o múltiplos pares de primos mayores que √*G*, o potencias de dos. Siempre que estas sumas sean menores que *G*, los resultados deben estar ya en la lista. Y esto lo podríamos hacer con todos los primos menores que $\sqrt{G}$, y siempre obtendríamos números que ya están en la lista. Entonces, ¿Quiere eso decir que los primos asociados son perfectamente intercambiables entre sí? Teniendo en cuenta que los primos asociados nos indican la distribución de los impares compuestos de la secuencia de N, ¿Esto no iría en contra de la distribución de todos los números impares compuestos de la secuencia de N y, por ende, también la de los primos y la de los números naturales en general? No tiene sentido pensar que una lista donde los primos asociados sean totalmente intercambiables pueda existir, va en contra de la distribución misma de los números naturales.

Gracias a los teoremas deducidos en este trabajo y al método de la lista que se ha descrito, podemos asegurar que la Conjetura de Goldbach es cierta para todo número par mayor que 2.

Declaración de disponibilidad de los datos de investigación

El conjunto de datos que apoya los resultados de este estudio se publicó en el propio artículo.

Conflicto de intereses

El autor declara que no existe ningún conflicto de intereses.

BIBLIOGRAFIA

[1] Vaughan, R. C. “Goldbach’s conjectures: A historical perspective”. *Open problems in mathematics*, 2016, p. 479-520

[2] Vaughan, R. C. (2003). the Hardy-Littlewood method (Vol. 2). Cambridge: Cambridge University Press.

[3] M. C. Liu, and T. Z. Wang. “On the Vinogradov bound in the three primes Goldbach conjecture”. *Acta Arithmetica,* Vol. 105, No. 2, 2022 p. 133-175

[4] Helfgott, H. A. “Major arcs for Goldbach's problem”. *arXiv preprint arXiv:1305.2897*, 2013

[5] Chen, J. R. "On the Representation of a Large Even Integer as the Sum of a Prime and the Product of at Most Two Primes." *Scientia Sinica Mathematica*, Vol. 16, 1973, p. 157-176

[6] Chen, J. R. "On the Representation of a Large Even Integer as the Sum of a Prime and the Product of at Most Two Primes, II" *Scientia Sinica Mathematica*, Vol. 21, 1978, p. 421-430

[7] Chen, J. R. and Wang, T.-Z. "On the Goldbach Problem". *Acta Mathematica Sinica*, Vol. 32, 1989, p. 702-718

[8] Hardy, G. H. "An introduction to the theory of numbers". 1929, p.778-818

[9] Tafula, C. "An elementary heuristic for Hardy–Littlewood extended Goldbach's conjecture". *São Paulo Journal of Mathematical Sciences*, Vol. 14, No. 1, 2020, p. 391-405.

[10] Sáenz de Cabezón, E. "Apocalipsis Matemático". *Somos B*, 2020