

Estado da publicação: O preprint não foi publicado em outro meio.

Uma Dedução das Condições de Conformidade, Equivalência e Equidistância das Projeções Cilíndricas Normais

Isaac Ramos, Leonard Silveira, Vinícius Martins, Andréa Seixas, Sílvio Garnés, Lucas Calado,
Paulo Airoidi, Robert Martins da Silva

<https://doi.org/10.1590/SciELOPreprints.14560>

Submetido em: 2025-12-12

Postado em: 2026-07-06 (versão 2)
(AAAA-MM-DD)

Justificativa da versão: Versão revisada e com a contribuição de mais um coautor.

Uma Dedução das Condições de Conformidade, Equivalência e Equidistância das Projeções Cilíndricas Normais

Isaac Ramos Junior

Universidade Federal do Pampa, Itaqui, Brasil
ORCID <https://orcid.org/0009-0009-9657-4060>

Leonard Niero da Silveira

Universidade Federal do Pampa, Itaqui, Brasil
ORCID <https://orcid.org/0000-0003-1780-135X>

Vinícius Bergmann Martins

Universidade Federal do Pampa, Itaqui, Brasil
ORCID <https://orcid.org/0000-0001-8532-4247>

Robert Martins da Silva

Universidade Federal do Pampa, Itaqui, Brasil
ORCID <https://orcid.org/0000-0002-0277-5980>

Andréa de Seixas

Universidade Federal de Pernambuco, Recife, Brasil
ORCID <https://orcid.org/0000-0002-5879-4902>

Sílvio Jacks dos Anjos Garnés

Universidade Federal de Pernambuco, Recife, Brasil
ORCID <https://orcid.org/0000-0002-0098-6645>

Lucas Gonzales Lima Pereira Calado

Universidade Federal de Pernambuco, Recife, Brasil
ORCID <https://orcid.org/0000-0002-2456-8288>

Paulo Alexandre de Borba Airolti

Universidade Federal do Pampa, Itaqui, Brasil
ORCID <https://orcid.org/0009-0009-9648-9915>

Resumo

As projeções cartográficas desempenham um papel significativo na representação da superfície terrestre ao converter coordenadas definidas em uma superfície de referência curva em coordenadas sobre um plano. Como nenhuma projeção cartográfica pode preservar simultaneamente todos os atributos geométricos, surgem inevitavelmente distorções relacionadas à distância, à forma e à área, tornando essencial a análise das propriedades das projeções cartográficas na cartografia matemática. Este estudo desenvolve uma derivação detalhada e rigorosa das condições de conformidade, equivalência e equidistância com base nas primeiras quantidades fundamentais de Gauss. Como caso ilustrativo, considera-se a projeção cilíndrica normal tangente ao Equador, em razão de sua relevância histórica e de sua conexão com projeções amplamente conhecidas, como Mercator, cilíndrica equivalente de Lambert e Plate Carrée. As derivações são formuladas por meio de uma abordagem diferencial-geométrica, relacionando diretamente as métricas de superfície às distorções cartográficas. Os resultados obtidos mostram que as propriedades clássicas das projeções cartográficas podem ser descritas sistematicamente por meio das primeiras quantidades fundamentais de Gauss, oferecendo, assim, uma interpretação integrada de seu comportamento métrico. Dessa forma, o artigo enfatiza a importância da geometria diferencial para a cartografia e apresenta uma ampla discussão matemática e pedagógica dos princípios geométricos que fundamentam as projeções cartográficas.

Palavras-chave: Cartografia Matemática. Mapeamento. Distorção.

1 INTRODUÇÃO

Os mapas são uma presença comum na mídia, nas redes sociais e nas discussões públicas, servindo como ferramentas poderosas para comunicar informações espaciais e sustentar pontos de vista. Embora sua produção tenha sido, no passado, amplamente limitada a governos e líderes políticos, as tecnologias da Web 2.0 tornaram a elaboração de mapas amplamente acessível. Atualmente, indivíduos, organizações não governamentais e grupos civis utilizam mapas para participar do debate público e comunicar suas próprias perspectivas e interesses (Budke, 2025).

Entretanto, criar um mapa está longe de ser uma tarefa trivial. Pelo contrário, a imensa área da superfície terrestre e os processos físicos e antropogênicos que nela ocorrem devem ser comprimidos e representados em uma pequena folha de papel (Mocnik, 2025). Assim, pode-se dizer que um mapa é produzido pela conversão de dados geoespaciais da Terra, que se encontram em um sistema de coordenadas esférico (ou

elipsoidal), para uma representação plana, seja em papel ou em formato digital. Nesse contexto, o processo de transferência de informações de uma superfície curva para uma superfície plana é chamado de projeção cartográfica, e pode ser realizado de diversas maneiras (Lapaine, 2025). De um ponto de vista mais específico, uma projeção cartográfica requer a transformação de um conjunto de duas coordenadas independentes em um modelo da Terra, geralmente latitude φ e longitude λ , em um conjunto de duas coordenadas independentes no mapa, como as coordenadas cartesianas x e y (Ghaderpour, 2016).

Uma característica notável das projeções cartográficas, estudada matematicamente, é que todas elas introduzem distorções no mapa, e seus tipos são geralmente considerados em termos de comprimento, forma e área (Pearson, 1990). Isso é relevante porque a história da criação das projeções cartográficas pode, de modo geral, ser considerada a própria história da cartografia, uma vez que todo cartógrafo, ao criar um mapa, primeiro intuitivamente e depois conscientemente, busca minimizar suas distorções (Novikova, 2025).

As projeções cartográficas podem ser classificadas de acordo com diferentes critérios. Um deles distingue o aspecto extrínseco, que diz respeito à relação geométrica entre a superfície de projeção e a superfície de referência quanto à sua natureza (plana, cônica ou cilíndrica), ao tipo de contato (tangente ou secante) e à orientação (normal, transversa ou oblíqua), e o aspecto intrínseco, que aborda as propriedades preservadas, como equidistância, conformidade ou equivalência (preservação de áreas), bem como o método de construção (geométrico, semigeométrico ou convencional). Essa classificação fornece uma estrutura clara para compreender tanto a geometria quanto a finalidade das projeções (Richardus e Adler, 1972).

No entanto, em relação às projeções cartográficas, há uma dificuldade clássica que pode ser brevemente ilustrada. A Segunda Guerra Mundial despertou uma nova consciência sobre problemas globais e renovou o interesse pela cartografia, destacando a necessidade de maior atenção ao tema. Contudo, mesmo após 80 anos, essas questões permanecem relevantes, embora a compreensão pública tenha avançado pouco. Essa dificuldade decorre da complexidade intrínseca do problema, que se liga à matemática e a parâmetros técnicos que não são totalmente claros para o público leigo, bem como à forma como os softwares e a literatura especializada comumente as tratam como difíceis de compreender (Kessler, 2025).

De fato, a base matemática das projeções cartográficas é complexa, o que pode ser intimidante para algumas pessoas. Embora aqueles familiarizados com cálculo avançado encontrem maior facilidade em utilizar livros detalhados sobre o assunto, a maioria dos usuários de dados geoespaciais não precisa conhecer as equações envolvidas, uma vez que os softwares de mapeamento realizam os cálculos. Ainda assim, ter algum entendimento da matemática envolvida permanece valioso (Kessler e Battersby, 2019). Nesse sentido, entre as muitas ferramentas utilizadas no estudo do tema estão as primeiras quantidades fundamentais de Gauss. Elas são definidas para superfícies específicas de interesse em projeções cartográficas e são utilizadas tanto na dedução das próprias projeções quanto no desenvolvimento de suas distorções (Pearson, 1990).

Além disso, contribuições recentes enfatizam o valor educacional da cartografia centrada no estudante. Ao combinar fundamentos teóricos com aplicações práticas em sala de aula, elas mostram como a elaboração de mapas pode promover letramento cartográfico, reflexão crítica e aprendizagem participativa por meio de abordagens como mapas temáticos, ferramentas digitais, mapas mentais e argumentação baseada em mapas, ao mesmo tempo em que destacam o papel da formação docente no apoio a essas práticas (Budke, 2025).

Nesse contexto, Morawski e Budke (2025) demonstram como mapas incorporados em jogos digitais podem promover letramento cartográfico crítico e reflexivo por meio de uma estrutura derivada da análise de jogos culturalmente influentes. Moser (2025) avalia o uso de mapas coropléticos em materiais educacionais e ambientes digitais, argumentando que seu potencial pedagógico é frequentemente limitado por reflexão metodológica e didática insuficiente. Edler et al. (2025) mostram que ambientes imersivos de realidade virtual podem ampliar o pensamento espacial, a tomada de decisão crítica e o engajamento com questões urbanas do mundo real. Eberth, Wagener e Zink (2025) ilustram como a integração de plataformas digitais de participação e métodos com utilização da voz podem fortalecer habilidades de produção cartográfica e o uso crítico de mapas tanto na formação docente quanto no contexto escolar. A pesquisa de Kunze et al. (2025) revela que muitos estudantes de geografia possuem apenas uma compreensão limitada da argumentação baseada em mapas antes de uma instrução específica, enquanto Ulbricht e Lindau (2025) destacam o valor dos trabalhos de campo e dos mapas mentais para a formação de concepções espaciais e o apoio ao desenvolvimento docente. De modo semelhante, Kunze e Budke (2025) constatarem que professores de geografia frequentemente têm uma compreensão incompleta da argumentação baseada em mapas, ressaltando a necessidade de formação direcionada para integrar melhor essas competências à prática em sala de aula.

Pelas razões apresentadas, este artigo busca fornecer uma dedução rigorosa e detalhada das equações associadas a três propriedades fundamentais das projeções cartográficas, isto é, conformidade, equivalência e equidistância, com base nas primeiras quantidades fundamentais de Gauss. Dado o número considerável de projeções cartográficas existentes, a análise concentra-se na projeção cilíndrica normal tangente à superfície de referência ao longo do Equador, em razão de sua importância histórica e de sua conexão com projeções amplamente utilizadas, como Mercator, Lambert cilíndrica equivalente e Plate Carrée. A metodologia combina

cartografia matemática com uma abordagem estruturada e orientada pedagogicamente, enfatizando a continuidade nas deduções para minimizar lacunas conceituais e facilitar a compreensão. Dessa forma, o estudo destaca não apenas a importância do domínio dos fundamentos matemáticos subjacentes à construção de mapas, mas também o valor educacional da prática cartográfica, demonstrando como a elaboração de mapas pode servir como um recurso didático acessível e eficaz mesmo em contextos que não exigem ferramentas tecnológicas avançadas.

2 AS PRIMEIRAS QUANTIDADES FUNDAMENTAIS DE GAUSS

Em termos gerais, a geometria diferencial clássica é o estudo das propriedades locais de curvas e superfícies. Entendem-se por propriedades locais aquelas que dependem apenas do comportamento da curva ou da superfície na vizinhança de um ponto. Os métodos que se mostraram adequados para estudar essas propriedades são os do cálculo diferencial (Carmo, 2016). Essa observação fornece a base para o presente trabalho, pois, como será demonstrado, as primeiras quantidades fundamentais de Gauss estão fundamentalmente apoiadas na geometria diferencial.

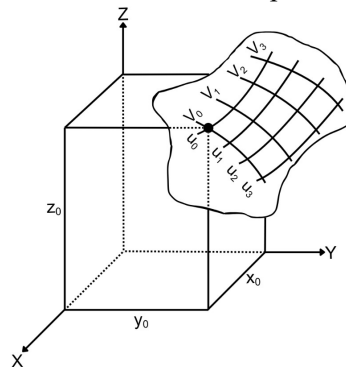
Assim, considere-se uma superfície arbitrária associada a um sistema cartesiano tridimensional, na qual u e v são curvas sobre essa superfície, conforme a Figura 1. Dessa forma, as seguintes equações paramétricas podem ser escritas para as coordenadas cartesianas de qualquer ponto dessa superfície, como apresentado nas Equações (1), (2) e (3) (Richardus e Adler, 1972):

$$x = f_1(u, v) \quad (1)$$

$$y = f_2(u, v) \quad (2)$$

$$z = f_3(u, v) \quad (3)$$

Figura 1 – Curvas u e v numa superfície qualquer.



Fonte: Adaptado de Richardus and Adler (1972).

Tomando os diferenciais totais das Equações (1), (2) e (3), se obtém as Equações (4), (5) e (6):

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv \quad (4)$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv \quad (5)$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv \quad (6)$$

Agora, sejam $(x+dx, y+dy, z+dz)$ as coordenadas de outro ponto arbitrário nessa mesma superfície, e seja ds a distância entre ele e o primeiro ponto, considerada infinitesimalmente pequena (Gauss, 1902). Isto é, ds representa um elemento infinitesimalmente pequeno de uma curva sobre qualquer superfície. Portanto, a Equação (7) pode ser escrita assim:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (7)$$

Substituindo as Equações (4), (5) e (6) na Equação (7) e expandindo, se obtém as Equações (8), (9) e (10):

$$ds^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv \right)^2 \quad (8)$$

$$ds^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial u} \right)^2 du^2 + 2 \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} dudv + \left(\frac{\partial x}{\partial v} \right)^2 dv^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u} \right)^2 du^2 + 2 \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} dudv + \left(\frac{\partial y}{\partial v} \right)^2 dv^2 +$$

$$+ \left(\frac{\partial z}{\partial u} \right)^2 du^2 + 2 \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} dudv + \left(\frac{\partial z}{\partial v} \right)^2 dv^2 \quad (9)$$

$$ds^2 = \left(\left(\frac{\partial x}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u} \right)^2 \right) du^2 + 2 \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} \right) dudv +$$

$$+ \left(\left(\frac{\partial x}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v} \right)^2 \right) dv^2 \quad (10)$$

Na Equação (10), podem-se fazer as seguintes considerações, como mostra as Equações (11), (12) e (13):

$$e = \left(\frac{\partial x}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u} \right)^2 \quad (11)$$

$$f = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} \quad (12)$$

$$g = \left(\frac{\partial x}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v} \right)^2 \quad (13)$$

As quantidades e , f e g nas Equações (11), (12) e (13) são conhecidas como as primeiras quantidades fundamentais de Gauss. Substituindo esses coeficientes novamente na Equação (10), obtém-se a Equação (14), que representa o elemento diferencial de linha de uma curva arbitrária sobre uma dada superfície (Pearson, 1990):

$$ds^2 = edu^2 + 2fdudv + gdv^2 \quad (14)$$

Algo fundamental ocorre com a Equação (14), o que é de grande importância para o estudo das projeções cartográficas, a saber: quando uma superfície é considerada não como o limite de um sólido, mas como um corpo flexível cuja espessura se supõe desaparecer, algumas propriedades da superfície dependem da forma que ela assume, enquanto outras são absolutas e permanecem invariantes independentemente da maneira como a superfície é curvada. Desse ponto de vista, uma superfície plana e uma superfície desenvolvível sobre um plano, como as superfícies cilíndricas e cônicas, devem ser consideradas essencialmente idênticas, e o método geral para definir de forma abrangente a natureza das superfícies consideradas dessa maneira baseia-se sempre nessa equação (Gauss, 1902). Por essas razões, a Equação (14) é o núcleo conceitual deste trabalho.

3 A MATRIZ FUNDAMENTAL DE TRANSFORMAÇÃO

Como as primeiras quantidades fundamentais de Gauss para a superfície de referência (esfera ou elipsoide) diferem daquelas associadas à superfície de projeção (plano, cone ou cilindro), serão utilizadas neste texto letras minúsculas para as primeiras e letras maiúsculas para as últimas, conforme segue.

Para a superfície de referência, de acordo com as Equações (15) a (21):

$$x = f_1(u, v) \quad (15)$$

$$y = f_2(u, v) \quad (16)$$

$$z = f_3(u, v) \quad (17)$$

$$ds^2 = edu^2 + 2fdudv + gdv^2 \quad (18)$$

$$e = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 \quad (19)$$

$$f = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} \quad (20)$$

$$g = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2 \quad (21)$$

Para a superfície de projeção, conforme as Equações (22) a (28):

$$X = g_1(U, V) \quad (22)$$

$$Y = g_2(U, V) \quad (23)$$

$$Z = g_3(U, V) \quad (24)$$

$$dS^2 = EdU^2 + 2FdUdV + GdV^2 \quad (25)$$

$$E = \left(\frac{\partial X}{\partial U}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial U}\right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial U}\right)^2 \quad (26)$$

$$F = \frac{\partial X}{\partial U} \frac{\partial X}{\partial V} + \frac{\partial Y}{\partial U} \frac{\partial Y}{\partial V} + \frac{\partial Z}{\partial U} \frac{\partial Z}{\partial V} \quad (27)$$

$$G = \left(\frac{\partial X}{\partial V}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial V}\right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial V}\right)^2 \quad (28)$$

As Equações (15) a (28) mostram que, até este ponto, as quantidades gaussianas foram encontradas separadamente para dois tipos de superfícies, a saber: e, f, g para a superfície de referência e E, F, G para a superfície de projeção. A seguir, será introduzido um procedimento para relacioná-las.

Tendo em mente que o objetivo de uma projeção cartográfica é representar uma superfície curva sobre uma superfície plana, ou seja, representar uma superfície de referência sobre uma superfície de projeção, isso significa que, matematicamente, busca-se encontrar tanto U quanto V como funções de u e v , conforme mostrado nas Equações (29) e (30):

$$U = h_1(u, v) \quad (29)$$

$$V = h_2(u, v) \quad (30)$$

A relação reversa também deve ocorrer, ou seja, como as projeções cartográficas são reversíveis (Richardus e Adler, 1972), as Equações (31) e (32) também devem ser válidas:

$$u = h_3(U, V) \quad (31)$$

$$v = h_4(U, V) \quad (32)$$

Consequentemente, pode-se substituir as Equações (29) e (30) nas Equações (22), (23) e (24), obtendo as Equações (33), (34) e (35):

$$X = g_1(U, V) = g_1(h_1(u, v), h_2(u, v)) = g_4(u, v) \quad (33)$$

$$Y = g_2(U, V) = g_2(h_1(u, v), h_2(u, v)) = g_5(u, v) \quad (34)$$

$$Z = g_3(U, V) = g_3(h_1(u, v), h_2(u, v)) = g_6(u, v) \quad (35)$$

Agora, as primeiras quantidades fundamentais de Gauss podem ser escritas para as funções que relacionam os dois tipos de superfícies, que serão diferentes daquelas já encontradas. É por isso que $\bar{E}, \bar{F}, \bar{G}$ serão usados para representá-las, formando um novo conjunto de equações, como mostra as Equações (36) a (42):

$$X = g_4(u, v) \quad (36)$$

$$Y = g_5(u, v) \quad (37)$$

$$Z = g_6(u, v) \quad (38)$$

$$dS^2 = \bar{E} du^2 + 2\bar{F} dudv + \bar{G} dv^2 \quad (39)$$

$$\bar{E} = \left(\frac{\partial X}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial u}\right)^2 \quad (40)$$

$$\bar{F} = \frac{\partial X}{\partial u} \frac{\partial X}{\partial v} + \frac{\partial Y}{\partial u} \frac{\partial Y}{\partial v} + \frac{\partial Z}{\partial u} \frac{\partial Z}{\partial v} \quad (41)$$

$$\bar{G} = \left(\frac{\partial X}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial v}\right)^2 \quad (42)$$

Cabe observar que o elemento dS na Equação (25) e na Equação (39) é o mesmo, isto é, um elemento diferencial de uma curva sobre a superfície de projeção. Entretanto, na Equação (39), ele é representado por X, Y, Z como funções de u, v , enquanto, na Equação (25), é representado por X, Y, Z como funções de U, V .

Agora é possível encontrar as derivadas parciais relacionadas às equações de $\bar{E}, \bar{F}, \bar{G}$. Isso pode ser feito aplicando a regra da cadeia para funções compostas nas Equações (33), (34) e (35), de acordo com as Equações (43) a (48):

$$\frac{\partial X}{\partial u} = \frac{\partial X}{\partial U} \frac{\partial U}{\partial u} + \frac{\partial X}{\partial V} \frac{\partial V}{\partial u} \quad (43)$$

$$\frac{\partial X}{\partial v} = \frac{\partial X}{\partial U} \frac{\partial U}{\partial v} + \frac{\partial X}{\partial V} \frac{\partial V}{\partial v} \quad (44)$$

$$\frac{\partial Y}{\partial u} = \frac{\partial Y}{\partial U} \frac{\partial U}{\partial u} + \frac{\partial Y}{\partial V} \frac{\partial V}{\partial u} \quad (45)$$

$$\frac{\partial Y}{\partial v} = \frac{\partial Y}{\partial U} \frac{\partial U}{\partial v} + \frac{\partial Y}{\partial V} \frac{\partial V}{\partial v} \quad (46)$$

$$\frac{\partial Z}{\partial u} = \frac{\partial Z}{\partial U} \frac{\partial U}{\partial u} + \frac{\partial Z}{\partial V} \frac{\partial V}{\partial u} \quad (47)$$

$$\frac{\partial Z}{\partial v} = \frac{\partial Z}{\partial U} \frac{\partial U}{\partial v} + \frac{\partial Z}{\partial V} \frac{\partial V}{\partial v} \quad (48)$$

As Equações (43) a (48) podem ser substituídas nas Equações (40), (41) e (42), e podem ser expandidas conforme as Equações (49), (50) e (51):

$$\begin{aligned} \bar{E} &= \left(\frac{\partial X}{\partial U} \frac{\partial U}{\partial u} + \frac{\partial X}{\partial V} \frac{\partial V}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial U} \frac{\partial U}{\partial u} + \frac{\partial Y}{\partial V} \frac{\partial V}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial U} \frac{\partial U}{\partial u} + \frac{\partial Z}{\partial V} \frac{\partial V}{\partial u}\right)^2 = \\ &= \left(\frac{\partial X}{\partial U} \frac{\partial U}{\partial u}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial X}{\partial U} \frac{\partial X}{\partial V} \frac{\partial U}{\partial u} \frac{\partial V}{\partial u}\right) + \left(\frac{\partial X}{\partial V} \frac{\partial V}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial U} \frac{\partial U}{\partial u}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial Y}{\partial U} \frac{\partial Y}{\partial V} \frac{\partial U}{\partial u} \frac{\partial V}{\partial u}\right) + \left(\frac{\partial Y}{\partial V} \frac{\partial V}{\partial u}\right)^2 + \\ &\quad + \left(\frac{\partial Z}{\partial U} \frac{\partial U}{\partial u}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial Z}{\partial U} \frac{\partial Z}{\partial V} \frac{\partial U}{\partial u} \frac{\partial V}{\partial u}\right) + \left(\frac{\partial Z}{\partial V} \frac{\partial V}{\partial u}\right)^2 = \\ &= \left(\left(\frac{\partial X}{\partial U}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial U}\right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial U}\right)^2\right) \left(\frac{\partial U}{\partial u}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial X}{\partial U} \frac{\partial X}{\partial V} + \frac{\partial Y}{\partial U} \frac{\partial Y}{\partial V} + \frac{\partial Z}{\partial U} \frac{\partial Z}{\partial V}\right) \frac{\partial U}{\partial u} \frac{\partial V}{\partial u} + \\ &\quad + \left(\left(\frac{\partial X}{\partial V}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial V}\right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial V}\right)^2\right) \left(\frac{\partial V}{\partial u}\right)^2 = \end{aligned} \quad (49)$$

[illegible]

Agora, é possível escrever os resultados de acordo com as Equações (52), (53) e (54):

$$\bar{E} = E \left(\frac{\partial U}{\partial u} \right)^2 + 2F \frac{\partial U}{\partial u} \frac{\partial V}{\partial u} + G \left(\frac{\partial V}{\partial u} \right)^2 \quad (52)$$

$$\bar{F} = E \frac{\partial U}{\partial u} \frac{\partial U}{\partial v} + F \left(\frac{\partial U}{\partial u} \frac{\partial V}{\partial v} + \frac{\partial V}{\partial u} \frac{\partial U}{\partial v} \right) + G \left(\frac{\partial V}{\partial u} \frac{\partial V}{\partial v} \right) \quad (53)$$

$$\bar{G} = E \left(\frac{\partial U}{\partial \eta} \right)^2 + 2F \left(\frac{\partial U}{\partial \eta} \frac{\partial V}{\partial \eta} \right) + G \left(\frac{\partial V}{\partial \eta} \right)^2 \quad (54)$$

As equações (52), (53) e (54) normalmente são expressas em forma de matriz, de acordo com a equação (55) (Pearson, 1990):

$$\begin{bmatrix} \bar{E} \\ \bar{F} \\ \bar{G} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial U}{\partial u}\right)^2 & 2\frac{\partial U}{\partial u}\frac{\partial V}{\partial u} & \left(\frac{\partial V}{\partial u}\right)^2 \\ \frac{\partial U}{\partial u}\frac{\partial U}{\partial v} & \frac{\partial U}{\partial u}\frac{\partial V}{\partial v} + \frac{\partial V}{\partial u}\frac{\partial U}{\partial v} & \frac{\partial V}{\partial u}\frac{\partial V}{\partial v} \\ \left(\frac{\partial U}{\partial v}\right)^2 & 2\left(\frac{\partial U}{\partial v}\frac{\partial V}{\partial v}\right) & \left(\frac{\partial V}{\partial v}\right)^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E \\ F \\ G \end{bmatrix} \quad (55)$$

A matriz 3x3 na Equação (55) é conhecida como matriz fundamental de transformação (Richardus e Adler, 1972), e é altamente relevante no desenvolvimento das projeções cartográficas.

3.1 Aplicação da matriz de transformação fundamental nas superfícies de referência e de projeção

Com a matriz fundamental de transformação disponível, é possível determinar as primeiras quantidades fundamentais de Gauss para as superfícies de referência e de projeção. Quando a esfera é utilizada como superfície de referência, suas equações paramétricas são inicialmente empregadas, conforme as Equações (56), (57) e (58) (Lapaine, 2025):

$$x = R \cos \varphi \cos \lambda \quad (56)$$

$$y = R \cos \varphi \sin \lambda \quad (57)$$

$$z = R \sin \varphi \quad (58)$$

Nas Equações (56), (57) e (58):

x, y, z são as coordenadas cartesianas de um ponto qualquer na superfície da esfera;

φ é a latitude;

λ é a longitude;

R é o raio da esfera.

No caso da esfera, se tem que $u = \varphi$ e $v = \lambda$ (Ramos Junior et al., 2025). Assim, as seguintes substituições podem ser feitas nas Equações (15) a (21), conforme as Equações (59) a (65):

$$x = f_1(\varphi, \lambda) \quad (59)$$

$$y = f_2(\varphi, \lambda) \quad (60)$$

$$z = f_3(\varphi, \lambda) \quad (61)$$

$$ds^2 = e d\varphi^2 + 2f d\varphi d\lambda + g d\lambda^2 \quad (62)$$

$$e = \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2 \quad (63)$$

$$f = \frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial x}{\partial \lambda} + \frac{\partial y}{\partial \varphi} \frac{\partial y}{\partial \lambda} + \frac{\partial z}{\partial \varphi} \frac{\partial z}{\partial \lambda} \quad (64)$$

$$g = \left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \lambda}\right)^2 \quad (65)$$

Derivando as Equações (56), (57) e (58) e substituindo de acordo com as Equações (63), (64) e (65), se obtém as Equações (66), (67) e (68), de acordo com (Pearson, 1990):

$$e = R^2 \quad (66)$$

$$f = 0 \quad (67)$$

$$g = R^2 \cos^2 \varphi \quad (68)$$

Seguindo o mesmo raciocínio, no caso em que o elipsoide é usado como superfície de referência, os resultados podem ser encontrados nas Equações (69) a (73) (Richardus e Adler, 1972):

$$e = M^2 \quad (69)$$

$$f = 0 \quad (70)$$

$$g = N^2 \cos^2 \varphi \quad (71)$$

$$M = \frac{a(1 - \epsilon^2)}{\sqrt{(1 - \epsilon^2 \sin^2 \varphi)^3}} \quad (72)$$

$$N = \frac{a}{\sqrt{1 - \epsilon^2 \sin^2 \varphi}} \quad (73)$$

Nas Equações (69) a (73):

M é o raio de curvatura na seção meridiana que passa por qualquer ponto da superfície do elipsoide;

N é o comprimento da normal ao elipsoide, desde o ponto na superfície do elipsoide até seu eixo menor;

a é o semieixo maior do elipsoide;

ϵ é a primeira excentricidade.

Cabe observar que, neste texto, a letra grega ϵ (épsilon) foi utilizada para a primeira excentricidade porque a letra e do alfabeto inglês já havia sido empregada anteriormente para representar uma das primeiras quantidades fundamentais de Gauss. Contudo, essa nomenclatura não é exclusiva, uma vez que, segundo Meyer (2018, p. 65), “ ϵ é o símbolo da excentricidade tanto na literatura comum quanto conforme adotado pela Organização Internacional de Normalização (ISO) e pela Comissão Eletrotécnica Internacional (IEC), embora outros autores usem símbolos diferentes, como e ”.

Assim, o mesmo procedimento pode ser seguido para encontrar as primeiras quantidades fundamentais de Gauss em relação à superfície de projeção, que neste trabalho tem como objeto o cilindro normal tangente à superfície de referência. Um cilindro em posição normal significa que, segundo Santos (1985, p. 121), “o eixo de simetria do cilindro coincide com o eixo de rotação da Terra”.

Sob essa perspectiva, nas projeções cilíndricas normais, as linhas de longitude dependem apenas da longitude, e as linhas de latitude dependem apenas da latitude. É conveniente exigir que a origem do sistema (U, V) coincida com a origem correspondente das curvas paramétricas da superfície de referência. Assim, quando coordenadas do tipo (φ, λ) são usadas na parametrização, as coordenadas (U, V) devem ser interpretadas como coordenadas retangulares (X, Y) no plano (Tobler, 1962). Nessas projeções, os meridianos são representados por linhas retas, paralelas e igualmente espaçadas, e os paralelos por linhas retas e paralelas, ortogonais aos meridianos. Elas podem ser conformes, equivalentes, arbitrárias ou, em casos particulares, equidistantes ao longo dos meridianos (Bugayevskiy e Snyder, 1995). Portanto, as equações paramétricas para o cilindro normal podem ser escritas conforme mostrado nas Equações (74), (75) e (76):

$$X = g_1(U, V) = U \quad (74)$$

$$Y = g_2(U, V) = V \quad (75)$$

$$Z = g_3(U, V) = 0 \quad (76)$$

Substituindo as Equações (74), (75) e (76) nas Equações (26), (27) e (28), se obtém as primeiras quantidades fundamentais de Gauss para o cilindro normal, de acordo com as Equações (77), (78) e (79):

$$E = \left(\frac{\partial X}{\partial U}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial U}\right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial U}\right)^2 = 1 + 0 + 0 = 1 \quad (77)$$

$$F = \frac{\partial X}{\partial U} \frac{\partial X}{\partial V} + \frac{\partial Y}{\partial U} \frac{\partial Y}{\partial V} + \frac{\partial Z}{\partial U} \frac{\partial Z}{\partial V} = 0 + 0 + 0 = 0 \quad (78)$$

$$G = \left(\frac{\partial X}{\partial V}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial V}\right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial V}\right)^2 = 0 + 1 + 0 = 1 \quad (79)$$

Com as primeiras quantidades fundamentais de Gauss dadas nas Equações (63), (64) e (65) e nas Equações (77), (78) e (79), pode-se aplicá-las para reescrever a matriz fundamental de transformação dada na Equação (55), conforme mostra a Equação (80):

$$\begin{bmatrix} \bar{E} \\ \bar{F} \\ \bar{G} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial X}{\partial \varphi}\right)^2 & 2 \frac{\partial X}{\partial \varphi} \frac{\partial Y}{\partial \varphi} & \left(\frac{\partial Y}{\partial \varphi}\right)^2 \\ \frac{\partial X}{\partial \varphi} \frac{\partial X}{\partial \lambda} & \frac{\partial X}{\partial \varphi} \frac{\partial Y}{\partial \lambda} + \frac{\partial Y}{\partial \varphi} \frac{\partial X}{\partial \lambda} & \frac{\partial Y}{\partial \varphi} \frac{\partial Y}{\partial \lambda} \\ \left(\frac{\partial X}{\partial \lambda}\right)^2 & 2 \left(\frac{\partial X}{\partial \lambda} \frac{\partial Y}{\partial \lambda}\right) & \left(\frac{\partial Y}{\partial \lambda}\right)^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (80)$$

Portanto, em projeções cilíndricas normais, como as linhas de mesmo meridiano λ dependem apenas da longitude, então $X = j_1(\lambda)$, e como as linhas da mesma latitude φ dependem apenas da latitude, então $Y = j_2(\varphi)$, se pode escrever as Equações (81) e (82) da seguinte maneira:

$$X = j_1(u, v) = j_1(v) = j_1(\lambda) \quad (81)$$

$$Y = j_2(u, v) = j_2(u) = j_2(\varphi) \quad (82)$$

Entre as derivadas parciais das Equações (81) e (82), note-se que duas delas são iguais a zero, como mostram as Equações (83) e (84):

$$\frac{\partial X}{\partial \varphi} = 0 \quad (83)$$

$$\frac{\partial Y}{\partial \lambda} = 0 \quad (84)$$

Com isso, ao substituir as Equações (83) e (84) na Equação (80) e desenvolvê-la, obtêm-se as Equações (85), (86), (87) e (88), que dependem de variáveis tanto da superfície de referência quanto da superfície de projeção:

$$\begin{bmatrix} \bar{E} \\ \bar{F} \\ \bar{G} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \left(\frac{\partial Y}{\partial \varphi}\right)^2 \\ 0 & \frac{\partial Y}{\partial \varphi} \frac{\partial X}{\partial \lambda} & 0 \\ \left(\frac{\partial X}{\partial \lambda}\right)^2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (85)$$

$$\bar{E} = \left(\frac{\partial Y}{\partial \varphi}\right)^2 \quad (86)$$

$$\bar{F} = 0 \quad (87)$$

$$\bar{G} = \left(\frac{\partial X}{\partial \lambda}\right)^2 \quad (88)$$

4 O FATOR LINEAR DE ESCALA

O fator linear de escala, ou simplesmente fator de escala, refere-se ao comprimento relativo de uma linha no modelo da Terra e da mesma linha representada no mapa (Pearson, 1990). Ou, segundo Krakiwsky (1973, p. 30), “o fator de escala descreve, em cada ponto da projeção cartográfica, a quantidade de distorção de comprimento”.

Matematicamente, o fator linear de escala é a razão entre o elemento diferencial da curva no plano da superfície de projeção e o elemento diferencial da curva correspondente na superfície de referência (Lapaine, 2021). Assim, para encontrar uma equação geral, a Equação (89) pode ser escrita da seguinte forma:

$$m = \frac{dS}{ds} \quad (89)$$

Para expressar o fator de escala em termos das primeiras quantidades fundamentais de Gauss, a Equação (89) pode ser elevada ao quadrado e, em seguida, as Equações (14) e (39) podem ser substituídas na equação resultante, gerando a Equação (90):

$$m^2 = \frac{dS^2}{ds^2} = \frac{\bar{E}du^2 + 2\bar{F}dudv + \bar{G}dv^2}{edu^2 + 2fdudv + gdv^2} \quad (90)$$

A partir deste momento, a Equação (90) pode ser desenvolvida de várias maneiras. Em uma delas, se pode dividir o numerador e o denominador por dv^2 e realizar um desenvolvimento, como mostram as Equações (91) e (92):

$$m^2 = \frac{\bar{E} \frac{du^2}{dv^2} + 2\bar{F} \frac{dudv}{dv^2} + \bar{G} \frac{dv^2}{dv^2}}{e \frac{du^2}{dv^2} + 2f \frac{dudv}{dv^2} + g \frac{dv^2}{dv^2}} \quad (91)$$

$$m^2 = \frac{\bar{E} \left(\frac{du}{dv}\right)^2 + 2\bar{F} \frac{du}{dv} + \bar{G}}{e \left(\frac{du}{dv}\right)^2 + 2f \frac{du}{dv} + g} \quad (92)$$

A razão para a divisão por dv^2 é deixar claro que m depende da direção de $\frac{du}{dv}$. Note-se que na Equação (92), considerando a esfera (ou o elipsoide) e o cilindro, se pode fazer a substituição de $\bar{F} = f = 0$, e, como já se viu que $u = \varphi$ e que $v = \lambda$, se chega na Equação (93):

$$m^2 = \frac{\bar{E} \left(\frac{d\varphi}{d\lambda}\right)^2 + \bar{G}}{e \left(\frac{d\varphi}{d\lambda}\right)^2 + g} \quad (93)$$

Em relação aos elementos diferenciais $d\varphi$ e $d\lambda$ dados na Equação (93), em que o primeiro se refere ao paralelo e o segundo ao meridiano, vale observar que, em nossa análise, $d\varphi$ depende apenas da latitude, e $d\lambda$ depende apenas da longitude. Dessa forma, pode-se dizer que uma variação diferencial apenas na latitude gerará um elemento diferencial de uma curva que depende somente de φ , que será chamado de elemento diferencial meridiano ds_φ , e, por raciocínio semelhante, o elemento diferencial de uma curva gerado exclusivamente por uma variação diferencial na longitude será chamado de elemento diferencial paralelo ds_λ . Essa geometria pode ser observada por meio do paralelogramo diferencial na Figura 2.

5 O PARALELOGRAMO DIFERENCIAL

A visualização de um paralelogramo diferencial é simples e pode ser feita seguindo a Figura 2, da seguinte maneira. Sejam dois pontos P e Q em uma superfície qualquer, infinitesimalmente próximos um do outro. A partir desses pontos, linhas coordenadas são traçadas, formando um paralelogramo com dimensões infinitesimalmente pequenas, usado para avaliar deformações locais relacionadas a distâncias, área e ângulos que ocorrem quando a superfície é projetada no plano. Com isso, as Equações (94) e (95) podem ser escritas:

$$P = (\varphi, \lambda) \quad (94)$$

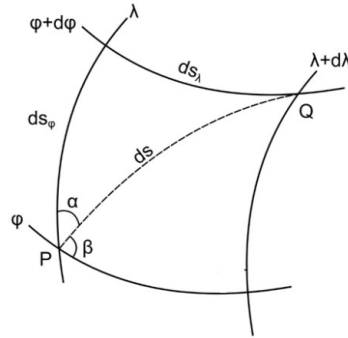
$$Q = (\varphi + d\varphi, \lambda + d\lambda) \quad (95)$$

Isso significa que, a partir da Figura 2, pode-se escrever as Equações (96) e (97):

$$ds_\varphi^2 = ed\varphi^2 + 2fd\varphi d\lambda + gd\lambda^2 \quad (96)$$

$$ds_\lambda^2 = ed\varphi^2 + 2fd\varphi d\lambda + gd\lambda^2 \quad (97)$$

Figura 2 – Um paralelogramo diferencial.



Fonte: Adaptado de Ramos Junior et al. (2025)

Como já foi deduzido que, para a esfera (ou elipsoide) $f = 0$, então, a partir das Equações (96) e (97) pode-se escrever as Equações (98) e (99):

$$ds_{\varphi}^2 = ed\varphi^2 + gd\lambda^2 \quad (98)$$

$$ds_{\lambda}^2 = ed\varphi^2 + gd\lambda^2 \quad (99)$$

E agora, já que ds_{φ} depende apenas de φ , isso significa que, nesse caso, $d\lambda = 0$; e já que ds_{λ} depende apenas de λ , isso significa que, nesse caso, $d\varphi = 0$. Dessa forma, a partir das Equações (98) e (99) pode-se escrever as Equações (100) e (101) e simplificá-las de acordo com as Equações (102) e (103):

$$ds_{\varphi}^2 = ed\varphi^2 \quad (100)$$

$$ds_{\lambda}^2 = gd\lambda^2 \quad (101)$$

$$ds_{\varphi} = \sqrt{e}d\varphi \quad (102)$$

$$ds_{\lambda} = \sqrt{g}d\lambda \quad (103)$$

Com a ajuda da Figura 2 e das Equações (102) e (103), se pode perceber que há um triângulo diferencial cujos lados são ds , $\sqrt{e}d\varphi$ e $\sqrt{g}d\lambda$. Isso significa que se pode aplicar a Lei dos Cossenos. Para isso, seja α o ângulo oposto ao lado $\sqrt{g}d\lambda$, e β o ângulo oposto ao lado $\sqrt{e}d\varphi$, e seja $180 - (\alpha + \beta)$ o ângulo oposto ao lado ds . Então se pode escrever as Equações (104), (105) e (106):

$$ds^2 = (\sqrt{e}d\varphi)^2 + (\sqrt{g}d\lambda)^2 - 2\sqrt{e}d\varphi\sqrt{g}d\lambda\cos(180 - (\alpha + \beta)) \quad (104)$$

$$ds^2 = ed\varphi^2 + gd\lambda^2 - 2\sqrt{e}d\varphi\sqrt{g}d\lambda\cos(180 - (\alpha + \beta)) \quad (105)$$

$$ds^2 = ed\varphi^2 + gd\lambda^2 + 2\sqrt{e}d\varphi\sqrt{g}d\lambda\cos(\alpha + \beta) \quad (106)$$

Igualando a Equação (106) com a Equação (14), e resolvendo, se chega às Equações (107), (108) e (109):

$$ed\varphi^2 + gd\lambda^2 + 2\sqrt{e}d\varphi\sqrt{g}d\lambda\cos(\alpha + \beta) = ed\varphi^2 + 2fd\varphi d\lambda + gd\lambda^2 \quad (107)$$

$$2\sqrt{e}d\varphi\sqrt{g}d\lambda\cos(\alpha + \beta) = 2fd\varphi d\lambda \quad (108)$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \frac{f}{\sqrt{eg}} \quad (109)$$

Em textos clássicos, como em Gauss (1902, p. 25), na Equação (109) o termo $(\alpha + \beta)$ é geralmente chamado de ω . Fazendo assim, se chega na Equação (110):

$$\cos\omega = \frac{f}{\sqrt{eg}} \quad (110)$$

Observe-se que, na Equação (110), como para a esfera (ou elipsoide) $f = 0$, isso significa que o ângulo entre qualquer meridiano e qualquer paralelo é um ângulo reto. Em outras palavras, paralelos e meridianos se cruzam em ângulos retos. Isso também acontece no caso do cilindro, já que ele tem $F = 0$. Assim, de forma análoga, a Equação (111) pode ser escrita para a superfície de projeção, usando letras maiúsculas:

$$\cos\Omega = \frac{F}{\sqrt{EG}} \quad (111)$$

Como foi mostrado que as curvas se cruzam em um ângulo reto para a esfera, para o elipsoide e para o cilindro, se pode trabalhar com triângulos retângulos diferenciais. Em outras palavras, agora se pode dizer que é possível manipular um triângulo retângulo diferencial cuja hipotenusa é ds e cujos catetos são $\sqrt{e}d\varphi$ e $\sqrt{g}d\lambda$. Assim, pode-se escrever as Equações (112) e (113):

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{g}d\lambda}{\sqrt{e}d\varphi} \quad (112)$$

$$\frac{d\varphi}{d\lambda} = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} \sqrt{\frac{g}{e}} \quad (113)$$

6 CONDIÇÕES DE CONFORMIDADE

Projeções cartográficas em que a forma dos pequenos elementos é preservada são chamadas de conformes (Melluish, 2014). Isso significa que trabalhar com as primeiras quantidades fundamentais de Gauss, nesse caso, é perfeitamente viável. Então, para começar o procedimento de derivação das condições de conformidade das projeções cilíndricas, pode-se inicialmente substituir a Equação (113) na Equação (93), obtendo as Equações (114) e (115):

$$m^2 = \frac{\bar{E} \left(\frac{d\varphi}{d\lambda} \right)^2 + \bar{G}}{e \left(\frac{d\varphi}{d\lambda} \right)^2 + g} \quad (114)$$

$$m^2 = \frac{\bar{E} \left(\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} \sqrt{\frac{g}{e}} \right)^2 + \bar{G}}{e \left(\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} \sqrt{\frac{g}{e}} \right)^2 + g} \quad (115)$$

Dividindo o numerador e o denominador da Equação (115) por g e desenvolvendo, chega-se às Equações (116) e (117):

$$m^2 = \frac{\frac{\bar{E}}{e} \frac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha} + \frac{\bar{G}}{g}}{\frac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha} + 1} \quad (116)$$

$$m^2 = \frac{\frac{\bar{E}}{e} \frac{\cos^2\alpha}{\operatorname{sen}^2\alpha} + \frac{\bar{G}}{g}}{\frac{\cos^2\alpha}{\operatorname{sen}^2\alpha} + 1} \quad (117)$$

Multiplicando o numerador e o denominador da Equação (117) por $\operatorname{sen}^2\alpha$ e expandindo, se obtém as Equações (118) e (119):

$$m^2 = \frac{\frac{\bar{E}}{e} \cos^2 \alpha + \frac{\bar{G}}{g} \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha} \quad (118)$$

$$m^2 = \frac{\bar{E}}{e} \cos^2 \alpha + \frac{\bar{G}}{g} \sin^2 \alpha \quad (119)$$

Olhando para a Equação (119), pode-se ver que ela depende do ângulo α , que é o azimute de P para Q , como mostra a Figura 2. Para evitar que isso aconteça, ou seja, para que a Equação (119) não dependa mais de nenhuma direção, considere-se a Equação (120):

$$\frac{\bar{E}}{e} = \frac{\bar{G}}{g} = K \quad (120)$$

Segue-se que, se a Equação (120) for substituída na Equação (119), m assumirá o mesmo valor para qualquer direção em relação àquele ponto na superfície da projeção ou, segundo Canters e Decler (1989, p. 07), “Projeções conformes são obtidas quando o fator de escala é independente do azimute ou é o mesmo em todas as direções”. Algebricamente, essa substituição pode ser feita como mostram as Equações (121), (122) e (123):

$$m^2 = K \cos^2 \alpha + K \sin^2 \alpha \quad (121)$$

$$m^2 = K (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) \quad (122)$$

$$m^2 = K \quad (123)$$

Assim, usando as primeiras quantidades fundamentais de Gauss, pode-se mostrar que uma projeção cilíndrica normal é conforme se satisfizer as condições dadas pelas Equações (124) e (125):

$$\bar{F} = f = 0 \quad (124)$$

$$\frac{\bar{E}}{e} = \frac{\bar{G}}{g} = K \quad (125)$$

Intrinsecamente à Equação (124), é possível fazer mais uma observação. Como ela foi usada para demonstrar a perpendicularidade entre meridianos e paralelos, vale destacar uma peculiaridade, a saber: se essa interseção em ângulo reto na superfície de referência não for mantida na superfície de projeção, em nenhuma circunstância a forma poderá ser preservada (Roblin, 1969). Portanto, a condição na Equação (124) é necessária, mas não suficiente para a conformidade, já que a condição na Equação (125) também deve ser atendida.

7 CONDIÇÃO DE EQUIVALÊNCIA

Na Figura 2, a área do paralelogramo é delimitada pelas duas linhas do primeiro sistema correspondentes a φ e $\varphi + d\varphi$, e pelas duas linhas do segundo sistema correspondentes a λ e $\lambda + d\lambda$ (Gauss, 1902), e, de acordo com Canters e Decler (1989, p. 08) “se, durante o processo de mapeamento, as áreas elementares forem preservadas, a projeção é chamada de equivalente”.

Como a Figura 2 trata de elementos diferenciais, suas dimensões permitem o uso de equações da geometria euclidiana. Então, para encontrar a condição da propriedade de equivalência, seja a área do elemento diferencial na Figura 2 representada pelas Equações (126) e (127):

$$da = \sqrt{e} d\varphi \sqrt{g} d\lambda \sin \omega \quad (126)$$

$$da = \sqrt{e} g \sin \omega d\varphi d\lambda \quad (127)$$

Considerando que a Equação (110) representa $\cos \omega$, alguns ajustes podem ser feitos, de acordo com as Equações (128), (129) e (130):

$$\cos\omega = \sqrt{1 - \sin^2\omega} = \frac{f}{\sqrt{eg}} \quad (128)$$

$$\sin\omega = \sqrt{1 - \frac{f^2}{eg}} \quad (129)$$

$$\sin\omega = \sqrt{\frac{eg - f^2}{eg}} \quad (130)$$

A equação (130) tem um termo que frequentemente aparece na cartografia matemática, que será destacado de acordo com a equação (131) (Bugayevskiy e Snyder, 1995):

$$h^2 = eg - f^2 \quad (131)$$

Portanto, ao substituir a Equação (131) na Equação (130), a Equação (132) pode ser escrita:

$$\sin\omega = \frac{h}{\sqrt{eg}} \quad (132)$$

Com a ajuda da Equação (132), a Equação (127) pode ser reescrita como a Equação (133):

$$da = \sqrt{eg} \sin\omega d\varphi d\lambda = h d\varphi d\lambda \quad (133)$$

A equação (133) também pode ser escrita de acordo com a notação original de Gauss (Gauss, 1902), substituindo a equação (131) na equação (133), como mostra a equação (134):

$$da = \sqrt{eg - f^2} d\varphi d\lambda \quad (134)$$

De forma similar às Equações (131) e (133), pode-se escrever as Equações (135) e (136), em relação à superfície de projeção:

$$\bar{H}^2 = \bar{E}\bar{G} - \bar{F}^2 \quad (135)$$

$$dA = \bar{H} d\varphi d\lambda = \sqrt{\bar{E}\bar{G} - \bar{F}^2} d\varphi d\lambda \quad (136)$$

O fator de escala para a área em um determinado ponto é a razão entre a área de um quadrilátero infinitesimal na projeção e a área do quadrilátero infinitesimal correspondente na superfície de referência (Bugayevskiy e Snyder, 1995). Assim, com as áreas diferenciais das diferentes superfícies dadas nas Equações (133) e (136), o fator de escala para a área, aqui denotado por m_a , pode ser obtido, como mostra a Equação (137):

$$m_a = \frac{dA}{da} \quad (137)$$

Na Equação (137), se a área no mapa for igual à área na esfera (ou no elipsoide), a projeção é equivalente (Pearson, 1990). Em outras palavras, a propriedade de equivalência acontece quando o fator de escala areal é igual a 1. Por isso, algebricamente, a Equação (138) pode ser escrita assim:

$$\frac{dA}{da} = 1 \quad (138)$$

Substituindo as Equações (133) e (136) na Equação (138), se obtém as Equações (139) e (140):

$$\frac{\bar{H} d\varphi d\lambda}{h d\varphi d\lambda} = 1 \quad (139)$$

$$\frac{\bar{H}}{h} = 1 \quad (140)$$

A equação (140) é uma representação da condição de equivalência das projeções cilíndricas normais usando as primeiras quantidades fundamentais de Gauss.

8 CONDIÇÃO DE EQUIDISTÂNCIA

Equidistância se refere à preservação das distâncias medidas em uma única direção. Essa propriedade só pode ser mantida ao longo de certas linhas ou a partir de pontos específicos. Quando as distâncias são preservadas ao longo dos meridianos, a projeção é chamada de equidistante meridiana; quando essa preservação acontece ao longo dos paralelos, a projeção é chamada de equidistante transversal (Gaspar, 2005).

Mais especificamente, de acordo com Bugayevskiy e Snyder (1995, p. 52), “Nas projeções cilíndricas normais equidistantes ao longo dos meridianos, a ordenada é determinada de modo que a escala ao longo de todos os meridianos seja preservada”. Essa condição pode ser representada matematicamente por meio das primeiras quantidades fundamentais de Gauss diretamente a partir da Equação (119), já que, ao definir $\alpha = 0^\circ$, obtém-se o fator de escala linear ao longo de um meridiano, aqui denotado por m_m , igualando-o a 1. Essas considerações podem ser vistas nas Equações (141) e (142):

$$m_m^2 = \frac{\bar{E}}{e} \cos^2 0^\circ + \frac{\bar{G}}{g} \sin^2 0^\circ \quad (141)$$

$$\frac{\bar{E}}{e} = 1 \quad (142)$$

A Equação (142) representa a condição de equidistância ao longo dos meridianos para projeções cilíndricas normais, em termos das primeiras quantidades fundamentais de Gauss (Deakin, 2003). Uma vantagem desse tipo de projeção é que, se se deseja reduzir simultaneamente as distorções de área e de forma, a projeção cilíndrica equidistante seria a melhor escolha (Györfy, 1990).

9 EXEMPLO PRÁTICO

Três projeções cilíndricas normais bem conhecidas e importantes, a saber, a projeção de Mercator, a projeção cilíndrica equivalente de Lambert e a projeção Plate Carrée, podem exemplificar os três tipos de distorção analisados neste artigo, destacando, assim, a importância de seu estudo. Essas projeções serão ilustradas juntamente com as elipses indicatrizes e suas respectivas análises de distorção, conforme mostrado nas Figuras 3, 4 e 5.

A elipse indicatriz, proposta por Auguste Tissot no século XVIII, é um conceito central para a compreensão gráfica das deformações nas projeções cartográficas. Ele mostrou que qualquer representação de uma superfície pode ser considerada como parte de várias projeções ortogonais em diferentes escalas. Se um pequeno círculo na superfície original é tomado e projetado sobre o plano, o processo envolve duas etapas: o ajuste de sua escala e a realização da projeção ortogonal. Como o plano do círculo geralmente está inclinado em relação ao plano de projeção, sua imagem torna-se uma elipse. Se o círculo tiver raio unitário, obtém-se a elipse indicatriz, ou elipse de deformação. Seus eixos a e b correspondem às direções principais da projeção, nas quais a escala assume seus valores máximo e mínimo (Gaspar, 2005). Essas elipses são importantes no estudo das projeções cartográficas, tanto para ilustrar a distorção quanto para servir de base aos cálculos que representam precisamente sua magnitude em cada ponto (Kopacz, 2012).

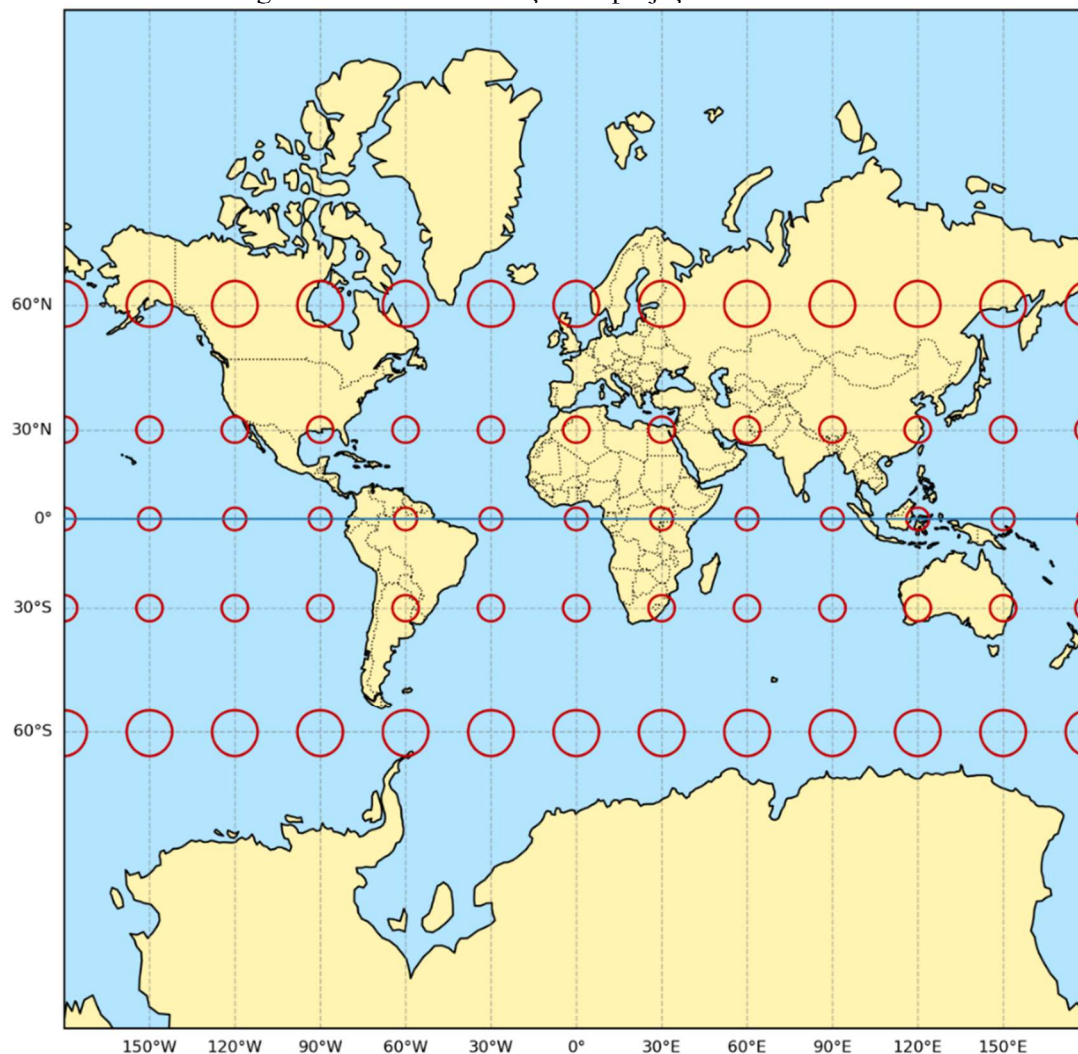
A projeção de Mercator foi introduzida em 1569 pelo cartógrafo de mesmo nome, principalmente para uso na navegação. Ela apresenta as seguintes características: é uma projeção cilíndrica normal; é conforme; os meridianos são linhas retas igualmente espaçadas; os paralelos são linhas retas desigualmente espaçadas, mais próximos entre si perto do Equador, interceptando os meridianos em ângulos retos; a escala é verdadeira ao longo do Equador; os polos situam-se no infinito; e há grande distorção de área nas regiões polares (Snyder, 1987). A Figura 3 ilustra o contorno dos continentes na projeção de Mercator, com base em um script elaborado em Python, preparado e disponibilizado publicamente em um repositório GitHub (Data, 2025).

Na Figura 3, pode-se observar que as elipses indicatrizes mantêm uma forma circular em todas as latitudes porque a projeção é conforme, isto é, preserva as formas locais. Entretanto, o tamanho das elipses aumenta progressivamente à medida que se afastam do Equador, indicando distorção de área e de distância em latitudes mais elevadas. Assim, embora as formas locais sejam representadas corretamente, as regiões mais distantes do Equador aparecem desproporcionalmente distorcidas em relação àquelas mais próximas dele.

Deve-se observar que uma projeção conforme preserva as formas locais, pois, por exemplo, um

pequeno círculo sobre o globo permanece circular no mapa. Contudo, essa propriedade apresenta limitações: a conformidade exige um aumento uniforme da escala, fazendo com que a escala de área cresça com o quadrado dessa variação. Portanto, embora pequenas formas sejam bem representadas, o rápido aumento das distorções ao se afastar das zonas sem deformação torna as projeções conformes inadequadas para representar com precisão grandes regiões, como continentes e oceanos (Maling, 1992).

Figura 3 – Uma visualização da projeção de Mercator.



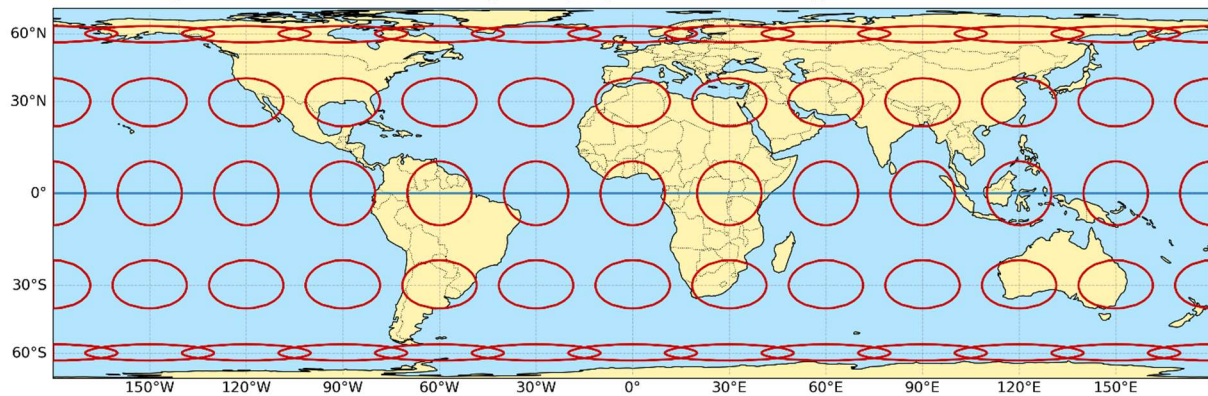
Fonte: Os Autores (2026).

A projeção cilíndrica equivalente de Lambert foi introduzida pelo cartógrafo de mesmo nome em 1772 e, em seu aspecto normal, apresenta as seguintes características: os meridianos são linhas retas igualmente espaçadas; os paralelos são linhas retas desigualmente espaçadas, mais próximos uns dos outros perto dos polos, interceptando os meridianos em ângulos retos; e, quando tangente, a escala é verdadeira ao longo do Equador (Snyder, 1987). A Figura 4 ilustra o contorno dos continentes nessa projeção, com base em um script elaborado em Python (Data, 2025).

Na projeção cilíndrica equivalente de Lambert, as elipses indicatrizes tornam-se cada vez mais achatadas à medida que a latitude aumenta, alongando-se progressivamente na direção Leste-Oeste. A distorção intensifica-se nas regiões de altas latitudes, onde ocorrem deformações significativas de distâncias e ângulos, embora a preservação da propriedade de equivalência de áreas seja mantida.

Em geral, as projeções equivalentes são altamente relevantes para o mapeamento de distribuições estatísticas. Por exemplo, ao representar dados de população, agricultura ou indústria, diversos símbolos, como pontos, podem ser utilizados para indicar quantidades específicas da variável em análise. Na leitura desse tipo de mapa, um fator essencial é a percepção visual da densidade populacional, da produção agrícola ou da atividade industrial à medida que variam entre diferentes regiões de um país ou continente (Maling, 1992).

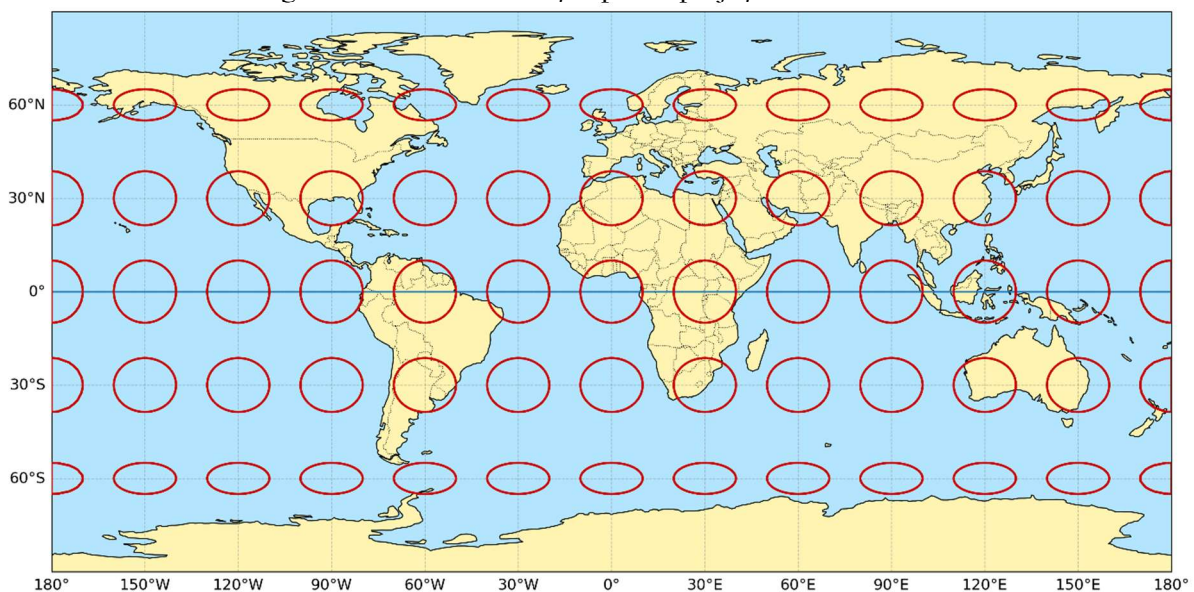
Figura 4 – Uma visualização para a projeção cilíndrica equivalente de Lambert.



Fonte: Os Autores (2026).

A projeção cilíndrica equidistante é conhecida na Europa desde o século III a.C. Em seu aspecto equatorial, é a mais simples de todas as projeções cartográficas de construir. Quando o cilindro está em posição normal e o Equador é o paralelo padrão, ela é conhecida como Plate Carrée, pois sua graticula é quadrada (Gaspar, 2005). Essa projeção é cilíndrica; é utilizada apenas na forma esférica; não é equivalente nem conforme; os meridianos e paralelos são linhas retas igualmente espaçadas que se interceptam em ângulos retos; e é amplamente utilizada em mapas mundiais ou regionais devido à sua construção simples (Snyder, 1987). A Figura 5 ilustra o contorno dos continentes na projeção Plate Carrée, com base em um script elaborado em Python (Data, 2025).

Figura 5 – Uma visualização para a projeção Plate Carrée.



Fonte: Os Autores (2026).

Como mostra a Figura 5, a propriedade de equidistância da projeção Plate Carrée preserva as distâncias ao longo dos meridianos. Isso pode ser observado por meio das elipses indicatrizes, que, neste caso, mantêm uma dimensão constante no sentido Leste-Oeste, mas tornam-se comprimidas na direção Norte-Sul à medida que a latitude aumenta, devido ao espaçamento constante dos paralelos. Consequentemente, em altas latitudes, as elipses aparecem mais comprimidas, revelando forte distorção de forma e de área, que atinge seu máximo próximo aos polos.

A propriedade de equidistância não é tão importante quanto a conformidade ou a equivalência, uma vez que um mapa no qual as distâncias são exatas em apenas uma direção geralmente não é desejável. Ainda assim, as projeções equidistantes servem como uma solução intermediária entre as projeções conformes e equivalentes. Nessas projeções, a variação da escala de área ocorre de modo mais progressivo do que nas projeções conformes, e a deformação angular máxima aumenta mais gradualmente do que nas projeções equivalentes. Por esse motivo, elas são frequentemente utilizadas em mapas de atlas, mapas de planejamento e representações amplas da superfície terrestre quando não há necessidade de preservar nem a conformidade nem a equivalência.

Também deve ser enfatizado que, no caso dessas três projeções, há uma relação direta entre a grade de coordenadas e o padrão de distorção. Isso significa que a grade possui os mesmos eixos de simetria que o padrão de distorção. Tal fato ocorre porque, no aspecto normal, as linhas de igual distorção coincidem com os paralelos. No caso da projeção cilíndrica, a linha de distorção nula corresponde ao Equador. Portanto, o aspecto normal dessa classe de projeções é conhecido como equatorial.

10 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este artigo derivou, utilizando as primeiras quantidades fundamentais de Gauss, as condições de conformidade, equivalência e equidistância para projeções cilíndricas normais tangentes à superfície de referência ao longo do Equador.

Como essas projeções apresentam distorção constante ao longo dos paralelos, elas constituem uma escolha adequada para zonas simétricas em relação ao Equador (Kerkovits, 2021). Além disso, quando o cilindro é desenvolvido, elas produzem um mapa no qual os meridianos são representados por linhas retas paralelas entre si, cujo espaçamento é proporcional à correspondente diferença de longitude. Os paralelos são linhas retas perpendiculares aos meridianos e, portanto, também são mutuamente paralelos. No entanto, três tipos de projeções foram apresentadas, e diferenciadas pelo fato de uma ser conforme, a projeção de Mercator; outra ser equivalente, a projeção cilíndrica equivalente de Lambert; e outra ser equidistante meridional, a projeção Plate Carrée. Essas características são garantidas pelo arcabouço matemático envolvido, que estabelece as condições necessárias para cada propriedade.

Como este artigo enfatizou, uma compreensão adequada das afirmações acima depende diretamente de conhecimentos matemáticos intermediários a avançados. Uma vez adquiridos, contudo, tais conhecimentos mostram-se vantajosos para aqueles que trabalham diretamente com a produção de mapas. Isso fica evidente no exemplo prático, no qual três projeções foram ilustradas, juntamente com suas elipses indicatrizes, por meio de um programa em Python cujo desenvolvimento exigiu uma compreensão clara dos conceitos envolvidos e da matemática necessária, todos relacionados às características específicas de cada projeção.

REFERÊNCIAS

- Budke, A. Didactic Approaches in Cartography. *KN - Journal of Cartography and Geographic Information* (2025) 75:173–176.
- Bugayevskiy, L. M., Snyder, J. P. (1995). *Map Projections, a Reference Manual*. Taylor & Francis Ltd, London.
- Canters, F., Deleir, H. (1989). *The World in Perspective, a Directory of World Map Projections*. John Wiley & Sons, New York.
- Carmo, M. P. (2016). *Differential Geometry of Curves and Surfaces: Revised & Updated Second Edition*. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey.
- Data (2025). *Data-cartographic-projections*. GitHub. <https://github.com/Data92repository/Data-cartographic-projections>.
- Deakin, R. E. (2003). *Map Projection Theory*. RMIT University, Melbourne.
- Eberth, A., Wagener, J. & Zink, R. Digital Participation Platforms as Tools for Critically Reflexive Mapping in Geography Education: Insights from a Project with Teacher Training Students. *KN J. Cartogr. Geogr. Inf.* 75, 219–231 (2025). <https://doi.org/10.1007/s42489-025-00201-4>
- Edler, D., Wiktorin, D., Becker, G. *et al.* The Potential of Immersive Virtual Reality for Teaching Geography in Schools. *KN J. Cartogr. Geogr. Inf.* 75, 205–217 (2025). <https://doi.org/10.1007/s42489-025-00204-1>
- Ghaderpour, E. (2016). Some Equal-area, Conformal and Conventional Map Projections: A Tutorial Review. *Journal of Applied Geodesy* 2016; 10(3): 197–209.
- Gaspar, J. A. (2005). *Cartas e Projeções Cartográficas* 3ª edição. Lidel, edições técnicas Ltda, Lisboa.
- Gauss, C. F. (1902). *General Investigations of Curved Surfaces*. Translated with notes and a bibliography by James Caddall Morehead, and Adam Miller Hiltebeitel. The Princeton University Library.
- Györfy, J. (1990). Anmerkungen zur Frage der Besten Echten Zylinderabbildungen. *Kartographische Nachrichten* 40(4), pp. 140–146.
- Kerkovits, K. (2021). Best Cylindrical Map Projections According to the Undesirability of Angular and Areal Distortions. *Advances in Cartography and GIScience of the International Cartographic Association*, 3, 2021. 30th International Cartographic Conference (ICC 2021), 14–18 December 2021, Florence, Italy.

<https://doi.org/10.5194/ica-adv-3-8-2021>.

- Kessler, F.C. (2025). Map Projections don't Have to be Hard. *Cartographic Perspectives*. Number 106, 2025. DOI: 10.14714/CP106.2029.
- Kessler, F. C., Battersby, S. E. (2019). *Working with Map Projections: A Guide to Their Selection*. CRC Press, Boca Raton.
- Kopacz, P. (2012). On Geometric Properties of Spherical Conics and Generalization of π in Navigation and Mapping. *Geodesy and Cartography*, 2012 Volume 38(4): 141–151, DOI:10.3846/20296991.2012.756995.
- Krakiwsky, E. J. (1973). *Conformal Map Projections in Geodesy*. Technical Report n° 217. Department of Geodesy and Geomatics Engineering, University of New Brunswick, Fredericton.
- Kunze, I.S., Budke, A., Krause, U. *et al.* Map-Based Argumentation in Teacher Training: Conceptual Beliefs of Geography Students in Germany, the Netherlands, and Spain. *KN J. Cartogr. Geogr. Inf.* 75, 233–243 (2025). <https://doi.org/10.1007/s42489-025-00205-0>
- Kunze, I.S., Budke, A. Map Use in Geography Lessons: Teachers' Concepts of Map-Based Argumentation. *KN J. Cartogr. Geogr. Inf.* 75, 255–264 (2025). <https://doi.org/10.1007/s42489-025-00198-w>
- Lapaine, M. (2021). Local Linear Scale Factors in Map Projections of an Ellipsoid. *Geographies*, 2021, 1, 238–250. <https://doi.org/10.3390/geographies1030014>.
- Lapaine, M. (2025). A New Derivation of the Formula for the Length of a Loxodrome Arc on a Sphere Using Cylindrical Projections. *ISPRS Int. J. Geo-Inf.* 2025, 14, 137. <https://doi.org/10.3390/ijgi14040137>.
- Maling, D. H. (1992). *Coordinate Systems and Map Projections, second edition*. Pergamon Press, Oxford.
- Melluish, R. K. (2014). *An Introduction of Mathematics of Map Projections*. Cambridge University Press, Cambridge: first paperback edition 2014.
- Meyer, T. H. (2018). *Introduction to Geometrical and Physical Geodesy: Foundations of Geomatics*. ESRI press, Redlands.
- Mocnik, F. B. (2025). Compromise Projections for World Maps – An Optimization Approach Using Discrete Global Grid Systems and Principles from Classical Mechanics. *International Journal of Digital Earth* 2025, Vol. 18, n°. 1, 2369636. <https://doi.org/10.1080/17538947.2024.2369636>.
- Morawski, M., Budke, A. What Is a Map in Digital Games? Expanding Cartographic Literacy Through Ludic Spatial Interfaces in Geography Education. *KN J. Cartogr. Geogr. Inf.* 75, 177–189 (2025). <https://doi.org/10.1007/s42489-025-00200-5>
- Moser, J. Choropleth Maps: Critical Reflections on the Frequently Used Representation Method in an Educational Context. *KN J. Cartogr. Geogr. Inf.* 75, 191–204 (2025). <https://doi.org/10.1007/s42489-025-00203-2>
- Novikova, E. (2025). *Best Map Projections*. Springer Nature Switzerland AG 2025.
- Pearson, I. (1990). *Map Projections Theory and Applications*. CRC Press, Boca Raton.
- Ramos Junior, I., Seixas, A., Garnés, S. J. A., Calado, L. G. L. P. (2025). Mercator Projection on the Sphere, a Deduction Without Mathematical Gap. *Mercator, Fortaleza*, v. 24, june 2025. <https://doi.org/10.4215/rm2025.e24014>.
- Richardus, P., Adler, R. K. (1972). *Map projections for geodesists, cartographers and geographers*. North-Holland Publishing Company, Amsterdam.
- Roblin, H. S. (1969). *Map Projections*. Edward Arnold (Publishers) Limited.
- Santos, A. A. (1985). *Representações Cartográficas*. Editora Universitária da Universidade Federal de Pernambuco, Recife.
- Snyder, J. P. (1987). *Map Projections, a Working Manual*. United States Geological Survey Professional Paper 1395. United States Government Printing Office, Washington.
- Tobler, W. R. (1962). A Classification of Map Projections. *Annals of the Association of American Geographers*, vol 52: p-p 167-175.
- Ulbricht, J., Lindau, AK. Pre-Service Geography Teachers' Spatial Conceptions—How Do Field Trips Shape Spatial Conceptions?. *KN J. Cartogr. Geogr. Inf.* 75, 245–254 (2025). <https://doi.org/10.1007/s42489-025-00208-x>

Contribuição de autoria

Isaac Ramos: Concepção, Análise Formal, Investigação, Metodologia, Administração de Projeto, Software, Supervisão, Validação, Visualização, Redação – Preparação do Rascunho Original, Redação – Revisão e Edição; Leonard Silveira: Concepção, Análise Formal, Investigação, Metodologia; Vinícius Martins: Análise Formal, Investigação, Metodologia, Software, Validação, Visualização; Robert Silva: Investigação, Supervisão, Redação – Preparação do Rascunho Original, Redação – Revisão e Edição; Andréa Seixas: Conceituação, Análise Formal, Investigação, Metodologia, Redação – Preparação do Rascunho Original, Redação – Revisão e Edição; Sílvia Garnés: Análise Formal, Metodologia, Redação – Revisão e Edição; Lucas Calado: Conceituação, Análise Formal, Investigação, Metodologia, Redação – Preparação do Rascunho Original, Redação – Revisão e Edição; Paulo Airolodi: Metodologia, Redação – Revisão e Edição.

Disponibilidade de Dados

Todo o conjunto de dados que suporta os resultados deste estudo foi disponibilizado no Github e pode ser acessado em <https://github.com/data92repository/data-cartographic-projections>

Conflito de Interesses

Os autores declaram que não têm conflitos de interesse financeiros, pessoais, profissionais ou institucionais que possam ter influenciado, ou que possam ser percebidos como influenciando, a condução da pesquisa, a análise e interpretação dos dados, a escrita do manuscrito ou a decisão de enviá-lo para publicação. Todos os autores aprovaram a versão final do manuscrito e concordam com sua submissão para publicação.

Este preprint foi submetido sob as seguintes condições:

- Os autores declaram que os necessários Termos de Consentimento Livre e Esclarecido de participantes ou pacientes na pesquisa foram obtidos e estão descritos no manuscrito, quando aplicável.
- Os autores declaram que a elaboração do manuscrito seguiu as normas éticas de comunicação científica.
- Os autores declaram que estão cientes que são os únicos responsáveis pelo conteúdo do preprint e que o depósito no SciELO Preprints não significa nenhum compromisso de parte do SciELO, exceto sua preservação e disseminação.
- Os autores declaram que os dados, aplicativos e outros conteúdos subjacentes ao manuscrito estão referenciados.
- O manuscrito depositado está no formato PDF.
- Os autores declaram que a pesquisa que deu origem ao manuscrito seguiu as boas práticas éticas e que as necessárias aprovações de comitês de ética de pesquisa, quando aplicável, estão descritas no manuscrito.
- Os autores declaram que uma vez que um manuscrito é postado no servidor SciELO Preprints, o mesmo só poderá ser retirado mediante pedido à Secretaria Editorial do SciELO Preprints, que afixará um aviso de retratação no seu lugar.
- Os autores concordam que o manuscrito aprovado será disponibilizado sob licença [Creative Commons CC-BY](#).
- O autor submissor declara que as contribuições de todos os autores e declaração de conflito de interesses estão incluídas de maneira explícita e em seções específicas do manuscrito.
- Os autores declaram que o manuscrito não foi depositado e/ou disponibilizado previamente em outro servidor de preprints ou publicado em um periódico.
- Caso o manuscrito esteja em processo de avaliação ou sendo preparado para publicação mas ainda não publicado por um periódico, os autores declaram que receberam autorização do periódico para realizar este depósito.
- O autor submissor declara que todos os autores do manuscrito concordam com a submissão ao SciELO Preprints.