

Estado da publicação: O preprint não foi publicado em outro meio.

Uma Dedução das Condições de Conformidade, Equivalência e Equidistância de Projeções Cilíndricas Normais

Isaac Ramos, Leonard Silveira, Vinícius Martins, Andréa Seixas, Sílvia Garnés, Lucas Calado,
Paulo Airoidi

<https://doi.org/10.1590/SciELOPreprints.14560>

Submetido em: 2025-12-12

Postado em: 2025-12-29 (versão 1)

(AAAA-MM-DD)

Uma Dedução das Condições de Conformidade, Equivalência e Equidistância de Projeções Cilíndricas Normais

A Deduction of the Conditions of Conformality, Equivalence, and Equidistance of Normal Cylindrical Projections

Isaac Ramos Junior^{a*} – Leonard Niero da Silveira^b – Vinícius Bergmann Martins^c – Andréa de Seixas^d –
Silvio Jacks dos Anjos Garnés^e – Lucas Gonzales Lima Pereira Calado^f – Paulo Alexandre de Borba Airoidi^g

(a) Mestre em Ciências Geodésicas e Tecnologias da Geoinformação.

ORCID: <https://orcid.org/0009-0009-9657-4060>. LATTES: <http://lattes.cnpq.br/1185677449549185>

(b) Doutor em Sensoriamento Remoto.

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1780-135X>. LATTES: <http://lattes.cnpq.br/2976534699472087>

(c) Doutor em Ciências Geodésicas.

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-8532-4247>. LATTES: <http://lattes.cnpq.br/9174476050154654>

(d) Doutora em Ciências Técnicas.

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-5879-4902>. LATTES: <http://lattes.cnpq.br/866483333841082>

(e) Doutor em Ciências Geodésicas.

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-0098-6645>. LATTES: <http://lattes.cnpq.br/8103793618305651>

(f) Doutor em Ciências Cartográficas.

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2456-8288>. LATTES: <http://lattes.cnpq.br/8037447731794851>

(g) Acadêmico de Engenharia Cartográfica e de Agrimensura.

ORCID: <https://orcid.org/0009-0009-9648-9915>. LATTES: <http://lattes.cnpq.br/6118322015958504>

(*) Autor correspondente. Endereço: Universidade Federal do Pampa. Av. Joaquim de Sá Britto, s/n, CEP: 97650-000, Itaqui (RS), Brasil. Telefone: (+55 55) 3433-1669. e-mail: isaacramos@unipampa.edu.br

Resumo: Um mapa é o resultado da conversão de dados geoespaciais da Terra em uma representação plana, que envolve um processo conhecido como projeção cartográfica. Esse procedimento, fundamental na cartografia, transfere informações de uma superfície curva para uma plana, mas, inevitavelmente, introduz distorções em comprimento, forma ou área. A busca por reduzir essas distorções acompanha toda a história da cartografia, motivando o desenvolvimento de diferentes métodos e classificações. O presente artigo tem como objetivo apresentar uma derivação rigorosa e detalhada das equações matemáticas que expressam as condições de conformidade, equivalência e equidistância, utilizando as primeiras quantidades fundamentais de Gauss. Essa abordagem busca oferecer uma compreensão mais clara das bases matemáticas que sustentam as projeções cartográficas. A justificativa decorre da dificuldade frequentemente encontrada na literatura especializada, muitas vezes marcada por lacunas matemáticas e pela complexidade excessiva. Assim, este trabalho propõe uma exposição didática que integra rigor e clareza conceitual, tomando como exemplo projeções cilíndricas normais tangentes ao equador, devido à sua relevância histórica e ampla aplicação, como as projeções de Mercator, equivalente de Lambert e Plate Carrée.

Palavras-chave: Cartografia Matemática. Mapeamento. Distorção.

Abstract: A map is the result of converting the Earth's geospatial data into a planar representation, a process known as a map projection. This procedure, fundamental to cartography, transfers information from a curved surface to a plane and inevitably introduces distortions in length, shape, or area. The pursuit of reducing these distortions has accompanied the entire history of cartography, motivating the development of various methods and classifications. The present paper aims to provide a rigorous and detailed derivation of the mathematical equations that express the conditions of conformality, equivalence, and equidistance, using first fundamental Gauss quantities. This approach seeks to offer a clearer understanding of the mathematical foundations that underpin map projections. The justification arises from the difficulties frequently found in mathematical cartography literature, often marked by mathematical gaps and excessive complexity. Thus, this work proposes a didactic exposition that integrates rigor and conceptual clarity, using as an example the normal cylindrical projection tangent to the equator, due to its historical relevance and wide application, as seen in the creation of the Mercator, Lambert equal-area, and Plate Carrée projections.

Keywords: Mathematical Cartography. Mapping. Distortion.

Resumen: Un mapa es el resultado de convertir los datos geoespaciales de la Tierra en una representación plana, un proceso conocido como proyección cartográfica. Este procedimiento, fundamental para la cartografía, transfiere información de una superficie curva a un plano e inevitablemente introduce distorsiones en longitud, forma o área. La búsqueda por reducir estas distorsiones ha acompañado toda la historia de la cartografía, motivando el desarrollo de diversos métodos y clasificaciones. El presente artículo tiene como objetivo presentar una deducción rigurosa y detallada de las ecuaciones matemáticas que expresan las condiciones de conformidad, equivalencia y equidistancia, utilizando las primeras cantidades fundamentales de Gauss. Este enfoque busca ofrecer una comprensión más clara de los fundamentos matemáticos que sustentan las proyecciones cartográficas. La justificación surge de las dificultades frecuentemente encontradas en la literatura de cartografía matemática, a menudo marcadas por lagunas matemáticas y una complejidad excesiva. Así, este trabajo propone una exposición didáctica que integra rigor y claridad conceptual, utilizando como ejemplo la proyección cilíndrica normal tangente al ecuador, debido a su relevancia histórica y amplia aplicación, como se observa en la creación de las proyecciones de Mercator, equivalente de Lambert y Plate Carrée.

Palabras clave: Cartografía Matemática. Mapeo. Distorsión.

1 INTRODUÇÃO

Criar um mapa está longe de ser algo trivial. Pelo contrário: a imensa área da superfície da Terra e os processos físicos e antropogênicos que nela ocorrem devem ser comprimidos e representados em uma folha de papel relativamente pequena (Mocnik, 2025). Assim, se pode dizer que um mapa é produzido pela conversão de dados geoespaciais da Terra que se encontram num sistema esférico (ou elipsoidal) de coordenadas, em uma representação plana, seja em papel ou em meio digital. Nesse contexto, o processo de transferência de informações de uma superfície curva para uma superfície plana é chamado de projeção cartográfica, e pode ser realizado de várias maneiras (Lapaine, 2025). De um ponto de vista mais específico, uma projeção cartográfica requer uma transformação de um conjunto de duas coordenadas independentes em um modelo da Terra, geralmente a latitude φ e a longitude λ , para um conjunto de duas coordenadas independentes no mapa, como, por exemplo, as coordenadas cartesianas x e y (Ghaderpour, 2016).

Uma característica marcante das projeções cartográficas, que geralmente se estuda matematicamente, é que todas introduzem distorções no mapa, sendo seus tipos geralmente considerados em termos de comprimento, forma e área (Pearson, 1990). Isso é relevante, já que a história da criação das melhores projeções cartográficas pode, de modo geral, ser vista como a própria história da cartografia, já que todo cartógrafo, ao criar um mapa, primeiro de forma intuitiva e depois consciente, procura minimizar suas distorções (Novikova, 2025).

As projeções cartográficas podem ser classificadas segundo diferentes critérios. Em um deles, distingue-se o aspecto extrínseco, que trata da relação geométrica entre a superfície de projeção e a de referência quanto à sua natureza (plana, cônica ou cilíndrica), tipo de contato (tangente ou secante), e orientação (normal, transversa ou oblíqua), e o aspecto intrínseco, que aborda as propriedades preservadas (equidistância, conformidade ou equivalência) e o método de construção (geométrico, semigeométrico ou convencional). Essa classificação oferece uma estrutura clara para compreender tanto a geometria quanto a finalidade das projeções (Richardus e Adler, 1972).

Ocorre que, em se tratando de projeções cartográficas, existe uma dificuldade clássica que pode ser brevemente ilustrada. A Segunda Guerra Mundial despertou uma nova consciência sobre os problemas globais e renovou o interesse pela cartografia, destacando a necessidade de maior atenção para o tema. Contudo, mesmo após 80 anos, esses temas permanecem relevantes, embora a compreensão pública pouco tenha avançado. Essa dificuldade se deve à complexidade intrínseca das projeções, ligada à matemática e a parâmetros técnicos pouco claros para os leigos, além da forma como normalmente os softwares e a literatura especializada as tratam como difíceis de entender (Kessler, 2025).

De fato, a base matemática das projeções cartográficas é complexa, o que pode ser intimidador para algumas pessoas. Embora aqueles familiarizados com cálculos avançados tenham maior facilidade em livros detalhados sobre o assunto, a maioria dos usuários de dados geoespaciais não precisa conhecer as equações envolvidas, pois o software de mapeamento realiza os cálculos. Mesmo assim, ter algum entendimento da matemática envolvida ainda é valioso (Kessler e Battersby, 2019). Nesse sentido, entre as muitas ferramentas utilizadas no estudo do tema, estão as primeiras quantidades fundamentais de Gauss. Elas são definidas para superfícies específicas de interesse das projeções cartográficas e são usadas tanto na derivação das próprias projeções quanto no desenvolvimento de suas distorções (Pearson, 1990).

Pelas razões expostas, este artigo tem como objetivo fornecer uma derivação rigorosa e detalhada das equações referentes a três propriedades das projeções cartográficas: a conformidade, a equivalência e a equidistância, utilizando as primeiras quantidades fundamentais de Gauss. Porém, como existem um número muito grande de projeções, a projeção cilíndrica normal e tangente à superfície de referência ao longo do equador foi escolhida, devido à sua importância histórica, que se reflete, por exemplo, nas projeções de Mercator, equivalente de Lambert, e Plate Carrée. A metodologia adotada neste trabalho integra tanto a cartografia matemática quanto uma abordagem didaticamente estruturada para facilitar a compreensão, com ênfase em garantir a continuidade entre as equações, a fim de reduzir possíveis lacunas conceituais, evidenciando a relevância do domínio de mínimas bases conceituais e matemáticas no processo de construção de mapas.

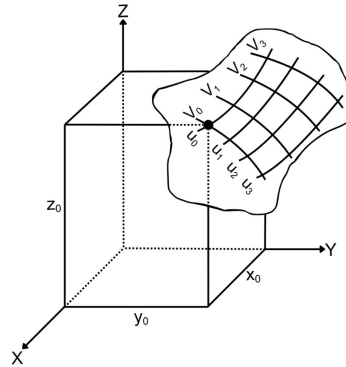
2 AS PRIMEIRAS QUANTIDADES FUNDAMENTAIS DE GAUSS

De modo geral, a geometria diferencial clássica é o estudo das propriedades locais de curvas e superfícies. Por propriedades locais, entendem-se aquelas que dependem apenas do comportamento da curva ou da superfície na vizinhança de um ponto. Os métodos que se mostraram adequados para o estudo dessas propriedades são os métodos do cálculo diferencial (Carmo, 2016). Essa observação é importante, e é o ponto

de partida deste trabalho, pois, o entendimento relativo às primeiras quantidades fundamentais de Gauss, como será visto, possui fundamento na geometria diferencial.

Assim, seja uma superfície qualquer, associada a um sistema cartesiano tridimensional, em que u e v são curvas nessa superfície, conforme mostra a Figura 1.

Figura 1 – Curvas u e v numa superfície qualquer.



Fonte: Adaptado de Richardus e Adler (1972).

Sendo assim, se pode escrever as seguintes equações paramétricas para as coordenadas cartesianas de um ponto qualquer nessa superfície, conforme as Eq. (1), (2) e (3) (Richardus e Adler, 1972):

$$x = f_1(u, v) \quad (1)$$

$$y = f_2(u, v) \quad (2)$$

$$z = f_3(u, v) \quad (3)$$

Fazendo os diferenciais totais das Eq. (1), (2) e (3) se tem as Eq. (4), (5) e (6):

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv \quad (4)$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv \quad (5)$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv \quad (6)$$

Agora, seja $(x + dx, y + dy, z + dz)$ as coordenadas de um outro ponto qualquer nesta mesma superfície, e seja ds a distância entre ele e o primeiro ponto, considerada como infinitesimalmente pequena (Gauss, 1902). Ou seja, ds representa um elemento infinitesimalmente pequeno de uma curva numa superfície qualquer. Então, se pode escrever a Eq. (7):

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (7)$$

Substituindo as Eq. (4), (5) e (6) na Eq. (7) e desenvolvendo se chega nas Eq. (8), (9) e (10):

$$ds^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv \right)^2 \quad (8)$$

$$ds^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial u} \right)^2 du^2 + 2 \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} dudv + \left(\frac{\partial x}{\partial v} \right)^2 dv^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u} \right)^2 du^2 + 2 \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} dudv + \left(\frac{\partial y}{\partial v} \right)^2 dv^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u} \right)^2 du^2 + 2 \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} dudv + \left(\frac{\partial z}{\partial v} \right)^2 dv^2 \quad (9)$$

$$ds^2 = \left(\left(\frac{\partial x}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u} \right)^2 \right) du^2 + 2 \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} \right) dudv + \left(\left(\frac{\partial x}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v} \right)^2 \right) dv^2 \quad (10)$$

$$+ \left(\left(\frac{\partial x}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v} \right)^2 \right) dv^2$$

Na Eq. (10), se pode fazer as seguintes considerações, conforme as Eq. (11), (12) e (13):

$$e = \left(\frac{\partial x}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u} \right)^2 \quad (11)$$

$$f = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} \quad (12)$$

$$g = \left(\frac{\partial x}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v} \right)^2 \quad (13)$$

As quantidades e, f, g das Eq. (11), (12) e (13) são conhecidas como as primeiras quantidades fundamentais de Gauss. Substituindo essas quantidades de volta na Eq. (10) se pode escrever a Eq. (14), que representa um elemento diferencial linear de uma curva qualquer numa dada superfície (Pearson, 1990):

$$ds^2 = edu^2 + 2fdudv + gdv^2 \quad (14)$$

Algo de fundamental ocorre com a Eq. (14), que é de extrema importância para o estudo das projeções cartográficas, a saber: quando uma superfície é considerada não como o limite de um sólido, mas como um corpo flexível, cuja espessura se supõe desaparecer, então algumas propriedades da superfície dependem da forma que ela assume, enquanto outras são absolutas e permanecem invariáveis, qualquer que seja a maneira como a superfície seja dobrada. Sob esse ponto de vista, uma superfície plana e uma superfície desenvolvível sobre um plano, como por exemplo superfícies cilíndricas e superfícies cônicas, devem ser consideradas essencialmente idênticas, e o método geral de definir de modo abrangente a natureza das superfícies assim consideradas baseia-se sempre nesta equação (Gauss, 1902). Por essas razões, a Eq. (14) é o núcleo conceitual deste trabalho.

3 A MATRIZ FUNDAMENTAL DE TRANSFORMAÇÃO

Como as primeiras quantidades fundamentais de Gauss para a superfície de referência (esfera ou elipsoide) são diferentes das pertencentes à superfície de projeção (plano, cone ou cilindro), nesse texto serão adotadas letras minúsculas para a primeira e letras maiúsculas para a segunda, da seguinte forma:

a) Para a superfície de referência, conforme as Eq. (15) a (21):

$$x = f_1(u, v) \quad (15)$$

$$y = f_2(u, v) \quad (16)$$

$$z = f_3(u, v) \quad (17)$$

$$ds^2 = edu^2 + 2fdudv + gdv^2 \quad (18)$$

$$e = \left(\frac{\partial x}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u} \right)^2 \quad (19)$$

$$f = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} \quad (20)$$

$$g = \left(\frac{\partial x}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v} \right)^2 \quad (21)$$

b) Para a superfície de projeção, conforme as Eq. (22) a (28):

$$X = g_1(U, V) \quad (22)$$

$$Y = g_2(U, V) \quad (23)$$

$$Z = g_3(U, V) \quad (24)$$

$$dS^2 = EdU^2 + 2FdUdV + GdV^2 \quad (25)$$

$$E = \left(\frac{\partial X}{\partial U}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial U}\right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial U}\right)^2 \quad (26)$$

$$F = \frac{\partial X}{\partial U} \frac{\partial X}{\partial V} + \frac{\partial Y}{\partial U} \frac{\partial Y}{\partial V} + \frac{\partial Z}{\partial U} \frac{\partial Z}{\partial V} \quad (27)$$

$$G = \left(\frac{\partial X}{\partial V}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial V}\right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial V}\right)^2 \quad (28)$$

As Eq. (15) a (28) mostram que, até o momento, foram encontradas apenas quantidades gaussianas para dois tipos de superfície (de referência e de projeção) de forma separada, ou seja, e, f, g para a superfície de referência e E, F, G para a superfície de projeção. Agora será iniciado um procedimento para associá-las.

Tendo em mente que a intenção de uma projeção cartográfica é representar uma superfície curva numa superfície plana, ou seja, representar uma superfície de referência numa superfície de projeção, isso significa que, matematicamente, se quer encontrar tanto U quanto V em função de u e v , conforme as Eq. (29) e (30):

$$U = h_1(u, v) \quad (29)$$

$$V = h_2(u, v) \quad (30)$$

Evidentemente a relação reversa também deve ocorrer, ou seja, como as projeções cartográficas são reversíveis (Richardus e Adler, 1972), também devem ser válidas as Eq. (31) e (32):

$$u = h_3(U, V) \quad (31)$$

$$v = h_4(U, V) \quad (32)$$

Dessa forma, se pode substituir as Eq. (29) e (30) nas Eq. (22), (23) e (24), obtendo as Eq. (33), (34) e (35):

$$X = g_1(U, V) = g_1(h_1(u, v), h_2(u, v)) = g_4(u, v) \quad (33)$$

$$Y = g_2(U, V) = g_2(h_1(u, v), h_2(u, v)) = g_5(u, v) \quad (34)$$

$$Z = g_3(U, V) = g_3(h_1(u, v), h_2(u, v)) = g_6(u, v) \quad (35)$$

Agora as primeiras quantidades fundamentais de Gauss podem ser escritas para as funções que relacionam os dois tipos de superfície, que obviamente serão diferentes das já encontradas. Por isso, serão usados $\bar{E}, \bar{F}, \bar{G}$ para representá-las, que formam um novo conjunto de equações, conforme mostram as Eq. (36) a (42):

$$X = g_4(u, v) \quad (36)$$

$$Y = g_5(u, v) \quad (37)$$

$$Z = g_6(u, v) \quad (38)$$

$$dS^2 = \bar{E}du^2 + 2\bar{F}dudv + \bar{G}dv^2 \quad (39)$$

$$\bar{E} = \left(\frac{\partial X}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial u}\right)^2 \quad (40)$$

$$\bar{F} = \frac{\partial X}{\partial u} \frac{\partial X}{\partial v} + \frac{\partial Y}{\partial u} \frac{\partial Y}{\partial v} + \frac{\partial Z}{\partial u} \frac{\partial Z}{\partial v} \quad (41)$$

$$\bar{G} = \left(\frac{\partial X}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial v}\right)^2 \quad (42)$$

Ressalta-se que o elemento dS das Eq. (25) e (39) é o mesmo, e que se trata de um elemento diferencial de uma curva na superfície de projeção, porém, na Eq. (39) ele é representado por X, Y, Z em função de u, v ,

enquanto na Eq. (25) ele está representado por X, Y, Z em função de U, V .

Agora é possível encontrar as derivadas parciais referentes às equações de $\bar{E}, \bar{F}, \bar{G}$. Isso pode ser feito aplicando a regra da cadeia para funções compostas nas Eq. (33), (34) e (35), conforme as Eq. (43) a (48):

$$\frac{\partial X}{\partial u} = \frac{\partial X}{\partial U} \frac{\partial U}{\partial u} + \frac{\partial X}{\partial V} \frac{\partial V}{\partial u} \quad (43)$$

$$\frac{\partial X}{\partial v} = \frac{\partial X}{\partial U} \frac{\partial U}{\partial v} + \frac{\partial X}{\partial V} \frac{\partial V}{\partial v} \quad (44)$$

$$\frac{\partial Y}{\partial u} = \frac{\partial Y}{\partial U} \frac{\partial U}{\partial u} + \frac{\partial Y}{\partial V} \frac{\partial V}{\partial u} \quad (45)$$

$$\frac{\partial Y}{\partial v} = \frac{\partial Y}{\partial U} \frac{\partial U}{\partial v} + \frac{\partial Y}{\partial V} \frac{\partial V}{\partial v} \quad (46)$$

$$\frac{\partial Z}{\partial u} = \frac{\partial Z}{\partial U} \frac{\partial U}{\partial u} + \frac{\partial Z}{\partial V} \frac{\partial V}{\partial u} \quad (47)$$

$$\frac{\partial Z}{\partial v} = \frac{\partial Z}{\partial U} \frac{\partial U}{\partial v} + \frac{\partial Z}{\partial V} \frac{\partial V}{\partial v} \quad (48)$$

As Eq. (43) a (48) podem ser substituídas nas Eq. (40), (41) e (42), e podem ser desenvolvidas conforme as Eq. (49), (50) e (51):

$$\begin{aligned} \bar{E} &= \left(\frac{\partial X}{\partial U} \frac{\partial U}{\partial u} + \frac{\partial X}{\partial V} \frac{\partial V}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial U} \frac{\partial U}{\partial u} + \frac{\partial Y}{\partial V} \frac{\partial V}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial U} \frac{\partial U}{\partial u} + \frac{\partial Z}{\partial V} \frac{\partial V}{\partial u} \right)^2 = \\ &= \left(\frac{\partial X}{\partial U} \frac{\partial U}{\partial u} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial X}{\partial U} \frac{\partial X}{\partial V} \frac{\partial U}{\partial u} \frac{\partial V}{\partial u} \right) + \left(\frac{\partial X}{\partial V} \frac{\partial V}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial U} \frac{\partial U}{\partial u} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial Y}{\partial U} \frac{\partial Y}{\partial V} \frac{\partial U}{\partial u} \frac{\partial V}{\partial u} \right) + \left(\frac{\partial Y}{\partial V} \frac{\partial V}{\partial u} \right)^2 + \\ &\quad + \left(\frac{\partial Z}{\partial U} \frac{\partial U}{\partial u} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial Z}{\partial U} \frac{\partial Z}{\partial V} \frac{\partial U}{\partial u} \frac{\partial V}{\partial u} \right) + \left(\frac{\partial Z}{\partial V} \frac{\partial V}{\partial u} \right)^2 = \\ &= \left(\left(\frac{\partial X}{\partial U} \right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial U} \right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial U} \right)^2 \right) \left(\frac{\partial U}{\partial u} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial X}{\partial U} \frac{\partial X}{\partial V} + \frac{\partial Y}{\partial U} \frac{\partial Y}{\partial V} + \frac{\partial Z}{\partial U} \frac{\partial Z}{\partial V} \right) \frac{\partial U}{\partial u} \frac{\partial V}{\partial u} + \\ &\quad + \left(\left(\frac{\partial X}{\partial V} \right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial V} \right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial V} \right)^2 \right) \left(\frac{\partial V}{\partial u} \right)^2 = \\ &= E \left(\frac{\partial U}{\partial u} \right)^2 + 2F \frac{\partial U}{\partial u} \frac{\partial V}{\partial u} + G \left(\frac{\partial V}{\partial u} \right)^2 \end{aligned} \quad (49)$$

$$\begin{aligned} \bar{F} &= \left(\frac{\partial X}{\partial U} \frac{\partial U}{\partial u} + \frac{\partial X}{\partial V} \frac{\partial V}{\partial u} \right) \left(\frac{\partial X}{\partial U} \frac{\partial U}{\partial v} + \frac{\partial X}{\partial V} \frac{\partial V}{\partial v} \right) + \left(\frac{\partial Y}{\partial U} \frac{\partial U}{\partial u} + \frac{\partial Y}{\partial V} \frac{\partial V}{\partial u} \right) \left(\frac{\partial Y}{\partial U} \frac{\partial U}{\partial v} + \frac{\partial Y}{\partial V} \frac{\partial V}{\partial v} \right) + \\ &\quad + \left(\frac{\partial Z}{\partial U} \frac{\partial U}{\partial u} + \frac{\partial Z}{\partial V} \frac{\partial V}{\partial u} \right) \left(\frac{\partial Z}{\partial U} \frac{\partial U}{\partial v} + \frac{\partial Z}{\partial V} \frac{\partial V}{\partial v} \right) = \\ &= \left(\frac{\partial X}{\partial U} \right)^2 \frac{\partial U}{\partial u} \frac{\partial U}{\partial v} + \frac{\partial X}{\partial U} \frac{\partial X}{\partial V} \frac{\partial U}{\partial u} \frac{\partial V}{\partial v} + \frac{\partial X}{\partial U} \frac{\partial X}{\partial V} \frac{\partial V}{\partial u} \frac{\partial U}{\partial v} + \left(\frac{\partial X}{\partial V} \right)^2 \frac{\partial V}{\partial u} \frac{\partial V}{\partial v} + \left(\frac{\partial Y}{\partial U} \right)^2 \frac{\partial U}{\partial u} \frac{\partial U}{\partial v} + \\ &\quad + \frac{\partial Y}{\partial U} \frac{\partial Y}{\partial V} \frac{\partial U}{\partial u} \frac{\partial V}{\partial v} + \frac{\partial Y}{\partial U} \frac{\partial Y}{\partial V} \frac{\partial V}{\partial u} \frac{\partial U}{\partial v} + \left(\frac{\partial Y}{\partial V} \right)^2 \frac{\partial V}{\partial u} \frac{\partial V}{\partial v} + \left(\frac{\partial Z}{\partial U} \right)^2 \frac{\partial U}{\partial u} \frac{\partial U}{\partial v} + \\ &\quad + \frac{\partial Z}{\partial U} \frac{\partial Z}{\partial V} \frac{\partial U}{\partial u} \frac{\partial V}{\partial v} + \frac{\partial Z}{\partial U} \frac{\partial Z}{\partial V} \frac{\partial V}{\partial u} \frac{\partial U}{\partial v} + \left(\frac{\partial Z}{\partial V} \right)^2 \frac{\partial V}{\partial u} \frac{\partial V}{\partial v} = \\ &= \left(\left(\frac{\partial X}{\partial U} \right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial U} \right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial U} \right)^2 \right) \frac{\partial U}{\partial u} \frac{\partial U}{\partial v} + \left(\frac{\partial X}{\partial U} \frac{\partial X}{\partial V} + \frac{\partial Y}{\partial U} \frac{\partial Y}{\partial V} + \frac{\partial Z}{\partial U} \frac{\partial Z}{\partial V} \right) \left(\frac{\partial U}{\partial u} \frac{\partial V}{\partial v} \right) + \\ &\quad + \left(\frac{\partial X}{\partial U} \frac{\partial X}{\partial V} + \frac{\partial Y}{\partial U} \frac{\partial Y}{\partial V} + \frac{\partial Z}{\partial U} \frac{\partial Z}{\partial V} \right) \left(\frac{\partial V}{\partial u} \frac{\partial U}{\partial v} \right) + \left(\left(\frac{\partial X}{\partial V} \right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial V} \right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial V} \right)^2 \right) \left(\frac{\partial V}{\partial u} \frac{\partial V}{\partial v} \right) = \end{aligned} \quad (50)$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\left(\frac{\partial X}{\partial U} \right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial U} \right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial U} \right)^2 \right) \frac{\partial U}{\partial u} \frac{\partial U}{\partial v} + \left(\frac{\partial X}{\partial U} \frac{\partial X}{\partial V} + \frac{\partial Y}{\partial U} \frac{\partial Y}{\partial V} + \frac{\partial Z}{\partial U} \frac{\partial Z}{\partial V} \right) \left(\frac{\partial U}{\partial u} \frac{\partial V}{\partial v} + \frac{\partial V}{\partial u} \frac{\partial U}{\partial v} \right) + \\
&\quad + \left(\left(\frac{\partial X}{\partial V} \right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial V} \right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial V} \right)^2 \right) \left(\frac{\partial V}{\partial u} \frac{\partial V}{\partial v} \right) = \\
&= E \frac{\partial U}{\partial u} \frac{\partial U}{\partial v} + F \left(\frac{\partial U}{\partial u} \frac{\partial V}{\partial v} + \frac{\partial V}{\partial u} \frac{\partial U}{\partial v} \right) + G \left(\frac{\partial V}{\partial u} \frac{\partial V}{\partial v} \right) \\
\bar{G} &= \left(\frac{\partial X}{\partial U} \frac{\partial U}{\partial v} + \frac{\partial X}{\partial V} \frac{\partial V}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial U} \frac{\partial U}{\partial v} + \frac{\partial Y}{\partial V} \frac{\partial V}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial U} \frac{\partial U}{\partial v} + \frac{\partial Z}{\partial V} \frac{\partial V}{\partial v} \right)^2 = \\
&= \left(\frac{\partial X}{\partial U} \frac{\partial U}{\partial v} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial X}{\partial U} \frac{\partial X}{\partial V} \frac{\partial U}{\partial v} \frac{\partial V}{\partial v} \right) + \left(\frac{\partial X}{\partial V} \frac{\partial V}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial U} \frac{\partial U}{\partial v} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial Y}{\partial U} \frac{\partial Y}{\partial V} \frac{\partial U}{\partial v} \frac{\partial V}{\partial v} \right) + \left(\frac{\partial Y}{\partial V} \frac{\partial V}{\partial v} \right)^2 + \\
&\quad + \left(\frac{\partial Z}{\partial U} \frac{\partial U}{\partial v} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial Z}{\partial U} \frac{\partial Z}{\partial V} \frac{\partial U}{\partial v} \frac{\partial V}{\partial v} \right) + \left(\frac{\partial Z}{\partial V} \frac{\partial V}{\partial v} \right)^2 = \\
&= \left(\left(\frac{\partial X}{\partial U} \right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial U} \right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial U} \right)^2 \right) \left(\frac{\partial U}{\partial v} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial X}{\partial U} \frac{\partial X}{\partial V} + \frac{\partial Y}{\partial U} \frac{\partial Y}{\partial V} + \frac{\partial Z}{\partial U} \frac{\partial Z}{\partial V} \right) \left(\frac{\partial U}{\partial v} \frac{\partial V}{\partial v} \right) + \\
&\quad + \left(\left(\frac{\partial X}{\partial V} \right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial V} \right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial V} \right)^2 \right) \left(\frac{\partial V}{\partial v} \right)^2 = \\
&= E \left(\frac{\partial U}{\partial v} \right)^2 + 2F \left(\frac{\partial U}{\partial v} \frac{\partial V}{\partial v} \right) + G \left(\frac{\partial V}{\partial v} \right)^2
\end{aligned} \tag{51}$$

Assim, se pode escrever os resultados conforme as Eq. (52), (53) e (54):

$$\bar{E} = E \left(\frac{\partial U}{\partial u} \right)^2 + 2F \frac{\partial U}{\partial u} \frac{\partial V}{\partial u} + G \left(\frac{\partial V}{\partial u} \right)^2 \tag{52}$$

$$\bar{F} = E \frac{\partial U}{\partial u} \frac{\partial U}{\partial v} + F \left(\frac{\partial U}{\partial u} \frac{\partial V}{\partial v} + \frac{\partial V}{\partial u} \frac{\partial U}{\partial v} \right) + G \left(\frac{\partial V}{\partial u} \frac{\partial V}{\partial v} \right) \tag{53}$$

$$\bar{G} = E \left(\frac{\partial U}{\partial v} \right)^2 + 2F \left(\frac{\partial U}{\partial v} \frac{\partial V}{\partial v} \right) + G \left(\frac{\partial V}{\partial v} \right)^2 \tag{54}$$

As Eq. (52), (53) e (54) normalmente são expressas na forma matricial, conforme a Eq. (55) (Pearson, 1990):

$$\begin{bmatrix} \bar{E} \\ \bar{F} \\ \bar{G} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial U}{\partial u} \right)^2 & 2 \frac{\partial U}{\partial u} \frac{\partial V}{\partial u} & \left(\frac{\partial V}{\partial u} \right)^2 \\ \frac{\partial U}{\partial u} \frac{\partial U}{\partial v} & \frac{\partial U}{\partial u} \frac{\partial V}{\partial v} + \frac{\partial V}{\partial u} \frac{\partial U}{\partial v} & \frac{\partial V}{\partial u} \frac{\partial V}{\partial v} \\ \left(\frac{\partial U}{\partial v} \right)^2 & 2 \left(\frac{\partial U}{\partial v} \frac{\partial V}{\partial v} \right) & \left(\frac{\partial V}{\partial v} \right)^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E \\ F \\ G \end{bmatrix} \tag{55}$$

A matriz 3x3 da Eq. (55) é conhecida como matriz fundamental de transformação (Richardus e Adler, 1972), e possui alta relevância no desenvolvimento das projeções cartográficas.

4 APLICAÇÃO NAS SUPERFÍCIES DE REFERÊNCIA E DE PROJEÇÃO

De posse da matriz fundamental, é possível determinar as primeiras quantidades fundamentais de Gauss para as superfícies de referência e de projeção. Quando se usa a esfera como superfície de referência, inicialmente são utilizadas suas equações paramétricas, conforme as Eq. (56), (57) e (58) (Lapaine, 2025):

$$x = R \cos \varphi \cos \lambda \tag{56}$$

$$y = R \cos \varphi \sin \lambda \quad (57)$$

$$z = R \sin \varphi \quad (58)$$

Nas Eq. (56), (57) e (58):

x, y, z são as coordenadas cartesianas de um ponto qualquer na superfície da esfera;

φ é a latitude;

λ é a longitude;

R é o raio da esfera;

No caso da esfera, se tem que $u = \varphi$ e $v = \lambda$ (Ramos Junior et al., 2025). Então, se pode fazer as seguintes substituições nas Eq. (15) a (21), chegando nas Eq. (59) a (65):

$$x = f_1(\varphi, \lambda) \quad (59)$$

$$y = f_2(\varphi, \lambda) \quad (60)$$

$$z = f_3(\varphi, \lambda) \quad (61)$$

$$ds^2 = e d\varphi^2 + 2f d\varphi d\lambda + g d\lambda^2 \quad (62)$$

$$e = \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2 \quad (63)$$

$$f = \frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial x}{\partial \lambda} + \frac{\partial y}{\partial \varphi} \frac{\partial y}{\partial \lambda} + \frac{\partial z}{\partial \varphi} \frac{\partial z}{\partial \lambda} \quad (64)$$

$$g = \left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \lambda}\right)^2 \quad (65)$$

Derivando as Eq. (56), (57) e (58) e substituindo conforme as Eq. (63), (64) e (65) se chega nas Eq. (66), (67) e (68), conforme (Pearson, 1990):

$$e = R^2 \quad (66)$$

$$f = 0 \quad (67)$$

$$g = R^2 \cos^2 \varphi \quad (68)$$

Seguindo o mesmo raciocínio, no caso em que se tem o elipsoide como superfície de referência, os resultados são os constantes nas Eq. (69) a (73) (Richardus e Adler, 1972):

$$e = M^2 \quad (69)$$

$$f = 0 \quad (70)$$

$$g = N^2 \cos^2 \varphi \quad (71)$$

$$M = \frac{a(1 - \epsilon^2)}{\sqrt{(1 - \epsilon^2 \sin^2 \varphi)^3}} \quad (72)$$

$$N = \frac{a}{\sqrt{1 - \epsilon^2 \sin^2 \varphi}} \quad (73)$$

Nas Eq. (69) a (73):

M é o raio de curvatura na seção meridiana passante por um ponto qualquer na superfície do elipsoide;

N é a grande normal de um ponto qualquer na superfície do elipsoide;

a é o semieixo maior do elipsoide;

ϵ é a primeira excentricidade.

Cabe observar que, neste texto, foi usada a letra grega ϵ (épsilon) para a primeira excentricidade, porque a letra e do alfabeto da língua portuguesa foi usada anteriormente para representar uma das primeiras quantidades fundamentais de Gauss. Contudo, repare-se que essa nomenclatura não é exclusiva, já que, conforme Meyer (2018, p. 65), “ ϵ é o símbolo para a excentricidade tanto na literatura comum quanto conforme

adotado pela Organização Internacional de Padronização (ISO) e pela Comissão Eletrotécnica Internacional (IEC), embora outros autores usem símbolos diferentes, como e'' .

Então, da mesma forma se pode proceder para que sejam encontradas as primeiras quantidades fundamentais de Gauss em relação à superfície de projeção, que neste trabalho teve o cilindro normal e tangente à superfície de referência como objeto. Um cilindro em posição normal significa que, conforme Santos (1985, p. 121) “o eixo de simetria do cilindro coincide com o eixo de rotação da Terra”.

Sob essa perspectiva, nas projeções cilíndricas normais, as linhas de longitude dependem apenas da longitude, e as linhas de latitude dependem apenas da latitude. É conveniente exigir que a origem do sistema (U, V) coincida com a respectiva origem das curvas paramétricas da superfície de referência. Assim, quando na parametrização se utiliza coordenadas do tipo (φ, λ) , as coordenadas (U, V) devem ser interpretadas como coordenadas retangulares (X, Y) no plano (Tobler, 1962).

Dessa forma, nas projeções cilíndricas normais os meridianos são representados por linhas retas, paralelas e igualmente espaçadas, e os paralelos por linhas retas, paralelas e ortogonais aos meridianos. Essas projeções podem ser conformes, equivalentes, arbitrarias, ou em casos particulares podem ser equidistantes ao longo dos meridianos (Bugayevskiy e Snyder, 1995). Por isso, as equações paramétricas para o cilindro normal podem ser escritas conforme as Eq. (74), (75) e (76):

$$X = g_1(U, V) = U \tag{74}$$

$$Y = g_2(U, V) = V \tag{75}$$

$$Z = g_3(U, V) = 0 \tag{76}$$

Substituindo as Eq. (74), (75) e (76) nas Eq. (26), (27) e (28), se chega nas primeiras quantidades fundamentais de Gauss para o cilindro normal, conforme as Eq. (77), (78) e (79):

$$E = \left(\frac{\partial X}{\partial U}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial U}\right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial U}\right)^2 = 1 + 0 + 0 = 1 \tag{77}$$

$$F = \frac{\partial X}{\partial U} \frac{\partial X}{\partial V} + \frac{\partial Y}{\partial U} \frac{\partial Y}{\partial V} + \frac{\partial Z}{\partial U} \frac{\partial Z}{\partial V} = 0 + 0 + 0 = 0 \tag{78}$$

$$G = \left(\frac{\partial X}{\partial V}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial V}\right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial V}\right)^2 = 0 + 1 + 0 = 1 \tag{79}$$

De posse das primeiras quantidades fundamentais de Gauss constantes nas Eq. (63), (64) e (65), e nas Eq. (77), (78) e (79), se pode aplicá-las para reescrever a matriz fundamental de transformação constante na Eq. (55), conforme mostra a Eq. (80):

$$\begin{bmatrix} \bar{E} \\ \bar{F} \\ \bar{G} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial X}{\partial \varphi}\right)^2 & 2 \frac{\partial X}{\partial \varphi} \frac{\partial Y}{\partial \varphi} & \left(\frac{\partial Y}{\partial \varphi}\right)^2 \\ \frac{\partial X}{\partial \varphi} \frac{\partial X}{\partial \lambda} & \frac{\partial X}{\partial \varphi} \frac{\partial Y}{\partial \lambda} + \frac{\partial Y}{\partial \varphi} \frac{\partial X}{\partial \lambda} & \frac{\partial Y}{\partial \varphi} \frac{\partial Y}{\partial \lambda} \\ \left(\frac{\partial X}{\partial \lambda}\right)^2 & 2 \left(\frac{\partial X}{\partial \lambda} \frac{\partial Y}{\partial \lambda}\right) & \left(\frac{\partial Y}{\partial \lambda}\right)^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{80}$$

Assim, como já explicitado, nas projeções cilíndricas normais, como as linhas de mesma longitude λ dependem somente da longitude, de forma que $X = j_1(\lambda)$, e como as linhas de mesma latitude φ dependem somente da latitude, de forma que $Y = j_2(\varphi)$, se pode escrever as Eq. (81) e (82) da seguinte forma:

$$X = j_1(u, v) = j_1(v) = j_1(\lambda) \tag{81}$$

$$Y = j_2(u, v) = j_2(u) = j_2(\varphi) \tag{82}$$

Entre as derivadas parciais das Eq. (81) e (82), repare-se que duas delas são iguais a zero, conforme mostram as Eq. (83) e (84):

$$\frac{\partial X}{\partial \varphi} = 0 \tag{83}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial \lambda} = 0 \tag{84}$$

Com isso, substituindo as Eq. (83) e (84) na Eq. (80) e desmembrando, se encontram as Eq. (85), (86), (87) e (88), que estão em função de variáveis tanto da superfície de referência quanto da superfície de projeção:

$$\begin{bmatrix} \bar{E} \\ \bar{F} \\ \bar{G} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \left(\frac{\partial Y}{\partial \varphi}\right)^2 \\ 0 & \frac{\partial Y}{\partial \varphi} \frac{\partial X}{\partial \lambda} & 0 \\ \left(\frac{\partial X}{\partial \lambda}\right)^2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{85}$$

$$\bar{E} = \left(\frac{\partial Y}{\partial \varphi}\right)^2 \tag{86}$$

$$\bar{F} = 0 \tag{87}$$

$$\bar{G} = \left(\frac{\partial X}{\partial \lambda}\right)^2 \tag{88}$$

5 O FATOR LINEAR DE ESCALA

O fator linear de escala, ou simplesmente fator de escala, se refere ao comprimento relativo de uma linha no modelo da Terra e a mesma linha representada no mapa (Pearson, 1990). Ou, de acordo com Krakiwsky (1973, p. 30), “O fator de escala descreve, em cada ponto da projeção do mapa, a quantidade de distorção no comprimento”.

Matematicamente, o fator de escala linear é a razão entre o elemento diferencial da curva no plano da superfície de projeção e o elemento diferencial da curva correspondente na superfície de referência (Lapaine, 2021). Assim, para encontrar uma equação geral, se pode escrever a Eq. (89):

$$m = \frac{dS}{ds} \tag{89}$$

Para deixar o fator de escala em função das primeiras quantidades fundamentais de Gauss, se pode elevar a Eq. (89) ao quadrado e a seguir substituir na equação resultante as Eq. (14) e (39), obtendo a Eq. (90):

$$m^2 = \frac{dS^2}{ds^2} = \frac{\bar{E}du^2 + 2\bar{F}dudv + \bar{G}dv^2}{edu^2 + 2fdudv + gdv^2} \tag{90}$$

A partir desse momento, se pode desenvolver a Eq. (90) de muitas maneiras. Numa delas, se pode dividir o numerador e o denominador por dv^2 , e desenvolver, conforme mostram as Eq. (91) e (92):

$$m^2 = \frac{\bar{E} \frac{du^2}{dv^2} + 2\bar{F} \frac{dudv}{dv^2} + \bar{G} \frac{dv^2}{dv^2}}{e \frac{du^2}{dv^2} + 2f \frac{dudv}{dv^2} + g \frac{dv^2}{dv^2}} \tag{91}$$

$$m^2 = \frac{\bar{E} \left(\frac{du}{dv}\right)^2 + 2\bar{F} \frac{du}{dv} + \bar{G}}{e \left(\frac{du}{dv}\right)^2 + 2f \frac{du}{dv} + g} \tag{92}$$

A razão da operação da divisão por dv^2 é para deixar claro que m depende da direção de $\frac{du}{dv}$. Repare-

se que na Eq. (92), considerando a esfera (ou o elipsoide) e o cilindro, pode ser feita a substituição de $\bar{F} = f = 0$, e como já foi visto que $u = \varphi$ e $v = \lambda$, se chega na Eq. (93):

$$m^2 = \frac{\bar{E} \left(\frac{d\varphi}{d\lambda}\right)^2 + \bar{G}}{e \left(\frac{d\varphi}{d\lambda}\right)^2 + g} \quad (93)$$

Em relação aos elementos diferenciais $d\varphi$ e $d\lambda$ constantes na Eq. (93), em que o primeiro é referente ao paralelo e o segundo ao meridiano, cabe ressaltar que, em nossa análise, $d\varphi$ depende apenas da latitude, e que $d\lambda$ depende apenas da longitude. Dessa forma, se pode dizer que uma alteração diferencial apenas da latitude vai gerar um elemento diferencial de uma curva, que está somente em função de φ , que será chamado de ds_φ , e, por raciocínio análogo, o elemento diferencial de uma curva gerado somente em função de uma alteração diferencial na longitude será chamado de ds_λ . Essa geometria pode ser vista por meio do quadrilátero diferencial, na Figura 2.

6 O QUADRILÁTERO DIFERENCIAL

A visualização de um quadrilátero diferencial é simples, e pode ser feita acompanhando a Figura 2, da seguinte forma. Imagine-se dois pontos P e Q numa superfície qualquer, que estejam infinitesimalmente próximos um do outro. A partir desses pontos, traçam-se linhas coordenadas que formam um quadrilátero de dimensões infinitesimalmente pequenas, usado para avaliar as deformações locais, relacionadas a distâncias, área e ângulos que ocorrem quando a superfície terrestre é projetada no plano.

Com isso, se pode escrever as Eq. (94) e (95):

$$P = (\varphi, \lambda) \quad (94)$$

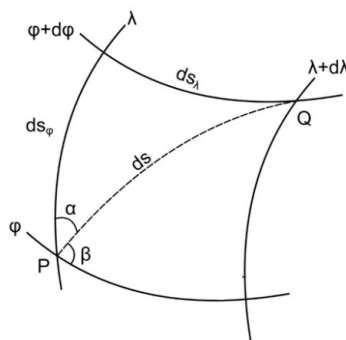
$$Q = (\varphi + d\varphi, \lambda + d\lambda) \quad (95)$$

Isso significa que, a partir da Figura 2 se pode escrever as Eq. (96) e (97):

$$ds_\varphi^2 = ed\varphi^2 + 2fd\varphi d\lambda + gd\lambda^2 \quad (96)$$

$$ds_\lambda^2 = ed\varphi^2 + 2fd\varphi d\lambda + gd\lambda^2 \quad (97)$$

Figura 2 – O quadrilátero diferencial.



Fonte: Adaptado de Ramos Junior et al. (2025)

Como já foi deduzido que, para a esfera (ou elipsoide), $f = 0$, então a partir das Eq. (96) e (97) se pode escrever as Eq. (98) e (99):

$$ds_\varphi^2 = ed\varphi^2 + gd\lambda^2 \quad (98)$$

$$ds_\lambda^2 = ed\varphi^2 + gd\lambda^2 \quad (99)$$

E agora, como ds_φ está somente em função de φ , significa que neste caso $d\lambda = 0$, e que, como ds_λ está somente em função de λ , significa que neste caso $d\varphi = 0$. Então a partir das Eq. (98) e (99) se pode

escrever as Eq. (100) e (101), e simplificá-las conforme as Eq. (102) e (103):

$$ds_\varphi^2 = ed\varphi^2 \tag{100}$$

$$ds_\lambda^2 = gd\lambda^2 \tag{101}$$

$$ds_\varphi = \sqrt{e}d\varphi \tag{102}$$

$$ds_\lambda = \sqrt{g}d\lambda \tag{103}$$

Com ajuda da Figura 2 e das Eq. (102) e (103), se pode reparar que existe um triângulo diferencial cujos lados são ds , $\sqrt{e}d\varphi$ e $\sqrt{g}d\lambda$. Isso significa que se pode aplicar a Lei dos cossenos. Para fazer isso, seja α o ângulo oposto ao lado $\sqrt{g}d\lambda$, e β o ângulo oposto ao lado $\sqrt{e}d\varphi$, e seja $180 - (\alpha + \beta)$ o ângulo oposto ao lado ds . Então se pode escrever as Eq. (104), (105) e (106):

$$ds^2 = (\sqrt{e}d\varphi)^2 + (\sqrt{g}d\lambda)^2 - 2\sqrt{eg}d\varphi d\lambda \cos(180 - (\alpha + \beta)) \tag{104}$$

$$ds^2 = ed\varphi^2 + gd\lambda^2 - 2\sqrt{eg}d\varphi d\lambda \cos(180 - (\alpha + \beta)) \tag{105}$$

$$ds^2 = ed\varphi^2 + gd\lambda^2 + 2\sqrt{eg}d\varphi d\lambda \cos(\alpha + \beta) \tag{106}$$

Igualando a Eq. (106) com a Eq. (14), e desenvolvendo, se chega nas Eq. (107), (108) e (109):

$$ed\varphi^2 + gd\lambda^2 + 2\sqrt{eg}d\varphi d\lambda \cos(\alpha + \beta) = ed\varphi^2 + 2fd\varphi d\lambda + gd\lambda^2 \tag{107}$$

$$2\sqrt{eg}d\varphi d\lambda \cos(\alpha + \beta) = 2fd\varphi d\lambda \tag{108}$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \frac{f}{\sqrt{eg}} \tag{109}$$

Nos textos clássicos, como em Gauss (1902, p. 25), na Eq. (109) se costuma chamar $(\alpha + \beta)$ de ω . Fazendo dessa forma, se chega na Eq. (110):

$$\cos\omega = \frac{f}{\sqrt{eg}} \tag{110}$$

Repare-se na Eq. (110) que, como para a esfera (ou elipsoide) $f = 0$, então isso significa que o ângulo entre qualquer meridiano e qualquer paralelo é reto. Ou seja, os paralelos e meridianos se cruzam em ângulos retos. Isso também ocorre no caso do cilindro, já que ele possui $F = 0$. Dessa forma, analogamente, se pode escrever para a superfície de projeção, com letras maiúsculas, a Eq. (111):

$$\cos\Omega = \frac{F}{\sqrt{EG}} \tag{111}$$

Como ficou demonstrado que as curvas se cruzam em ângulo reto tanto para a esfera, para o elipsoide, e para o cilindro, se pode trabalhar com triângulos retângulos diferenciais. Ou seja, agora se pode dizer que se pode manipular um triângulo retângulo diferencial cuja hipotenusa é ds e cujos catetos são $\sqrt{e}d\varphi$ e $\sqrt{g}d\lambda$. Assim, se pode escrever as Eq. (112) e (113):

$$tg\alpha = \frac{\sqrt{g}d\lambda}{\sqrt{e}d\varphi} \tag{112}$$

$$\frac{d\varphi}{d\lambda} = \frac{1}{tg\alpha} \sqrt{\frac{g}{e}} \tag{113}$$

7 CONDIÇÕES DE CONFORMIDADE

Projeções nas quais a forma de pequenos elementos é preservada são chamadas de conformes (Melluish, 2014). Isso significa que trabalhar com as primeiras quantidades fundamentais de Gauss nesse caso é perfeitamente viável. Assim, para iniciar o procedimento de dedução das condições de conformidade das projeções cilíndricas, inicialmente se pode substituir a Eq. (113) na Eq. (93), obtendo as Eq. (114) e (115):

$$m^2 = \frac{\bar{E} \left(\frac{d\varphi}{d\lambda}\right)^2 + \bar{G}}{e \left(\frac{d\varphi}{d\lambda}\right)^2 + g} \quad (114)$$

$$m^2 = \frac{\bar{E} \left(\frac{1}{tg\alpha} \sqrt{\frac{g}{e}}\right)^2 + \bar{G}}{e \left(\frac{1}{tg\alpha} \sqrt{\frac{g}{e}}\right)^2 + g} \quad (115)$$

Dividindo o numerador e o denominador da Eq. (115) por g e desenvolvendo se chega nas Eq. (116) e (117):

$$m^2 = \frac{\frac{\bar{E}}{e} \frac{1}{tg^2\alpha} + \frac{\bar{G}}{g}}{\frac{1}{tg^2\alpha} + 1} \quad (116)$$

$$m^2 = \frac{\frac{\bar{E}}{e} \frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} + \frac{\bar{G}}{g}}{\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} + 1} \quad (117)$$

Multiplicando o numerador e o denominador da Eq. (117) por $\sin^2\alpha$ e desenvolvendo se obtém as Eq. (118) e (119):

$$m^2 = \frac{\frac{\bar{E}}{e} \cos^2\alpha + \frac{\bar{G}}{g} \sin^2\alpha}{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha} \quad (118)$$

$$m^2 = \frac{\bar{E}}{e} \cos^2\alpha + \frac{\bar{G}}{g} \sin^2\alpha \quad (119)$$

Observando a Eq. (119) se percebe que ela depende do ângulo α , que na verdade é o azimute de P para Q , conforme mostra a Figura 2. Para que isso deixe de ocorrer, ou seja, para que a Eq. (119) não dependa mais de nenhuma direção, considere-se a Eq. (120):

$$\frac{\bar{E}}{e} = \frac{\bar{G}}{g} = K \quad (120)$$

Ocorre que se a Eq. (120) for substituída na Eq. (119), m assumirá o mesmo valor para qualquer direção em relação àquele ponto na superfície de projeção, ou, segundo Canters e Decler (1989, p. 07) “As projeções conformes são obtidas quando o fator de escala é independente do azimute ou é o mesmo em todas as direções”. Algebricamente, essa substituição pode ser feita, conforme mostram as Eq. (121), (122) e (123):

$$m^2 = K \cos^2\alpha + K \sin^2\alpha \quad (121)$$

$$m^2 = K(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) \quad (122)$$

$$m^2 = K \quad (123)$$

Dessa forma, utilizando as primeiras quantidades fundamentais de Gauss, ficou demonstrado que uma projeção cilíndrica normal é conforme se ela obedece às seguintes condições, de acordo com as Eq. (124) e (125):

$$\bar{F} = f = 0 \tag{124}$$

$$\frac{\bar{E}}{e} = \frac{\bar{G}}{g} = K \tag{125}$$

Intrinsecamente à Eq. (124), pode ser feita mais uma observação. Como ela foi utilizada na demonstração da perpendicularidade entre os meridianos e paralelos, cabe destacar uma peculiaridade, que é a seguinte: se essa interseção em ângulo reto na superfície de referência não for mantida na superfície de projeção, em nenhuma circunstância a forma pode ser preservada (Roblin, 1969). Assim, a condição da Eq. (124) é necessária, mas não suficiente para a conformidade, já que também é necessário que a condição da Eq. (125) seja cumprida.

8 CONDIÇÃO DE EQUIVALÊNCIA

Na Figura 2, a área do elemento de superfície em forma de paralelogramo será delimitada pelas duas linhas do primeiro sistema correspondente a φ e $\varphi + d\varphi$, e pelas duas linhas do segundo sistema correspondente a λ e $\lambda + d\lambda$ (Gauss, 1902), e segundo Canters e Decler (1989, p. 08) “se, durante o processo de mapeamento, as áreas elementares forem preservadas, a projeção é chamada de equivalente”.

Como a Figura 2 trata de elementos diferenciais, suas dimensões autorizam o uso de equações da geometria euclidiana. Assim, para se encontrar a condição de equivalência, inicialmente seja na Figura 2 a área do quadrilátero diferencial, que pode ser representada pelas Eq. (126) e (127):

$$da = \sqrt{e}d\varphi\sqrt{g}d\lambda\sin\omega \tag{126}$$

$$da = \sqrt{eg}\sin\omega d\varphi d\lambda \tag{127}$$

Considerando que a Eq. (110) representa $\cos\omega$, uma manipulação pode ser feita, conforme as Eq. (128), (129) e (130):

$$\cos\omega = \sqrt{1 - \sin^2\omega} = \frac{f}{\sqrt{eg}} \tag{128}$$

$$\sin\omega = \sqrt{1 - \frac{f^2}{eg}} \tag{129}$$

$$\sin\omega = \sqrt{\frac{eg - f^2}{eg}} \tag{130}$$

A Eq. (130) possui um termo que costuma aparecer em cartografia matemática, que será destacado conforme a Eq. (131) (Bugayevskiy e Snyder, 1995):

$$h^2 = eg - f^2 \tag{131}$$

Assim, substituindo a Eq. (131) na Eq. (130), se pode escrever a Eq. (132):

$$\sin\omega = \frac{h}{\sqrt{eg}} \tag{132}$$

Com ajuda da Eq. (132), a Eq. (127) pode ser reescrita conforme a Eq. (133):

$$da = \sqrt{eg}\sin\omega d\varphi d\lambda = h d\varphi d\lambda \tag{133}$$

A Eq. (133) também pode ser escrita conforme a notação original de Gauss (Gauss, 1902), substituindo

a Eq. (131) na Eq. (133), conforme a Eq. (134):

$$da = \sqrt{eg - f^2}d\varphi d\lambda \quad (134)$$

Analogamente às Eq. (131) e (133), se pode escrever as Eq. (135) e (136), referentes à superfície de projeção:

$$\bar{H}^2 = \bar{E}\bar{G} - \bar{F}^2 \quad (135)$$

$$dA = \bar{H}d\varphi d\lambda = \sqrt{EG - F^2}d\varphi d\lambda \quad (136)$$

O fator de escala para a área em um ponto dado é a razão entre a área de um quadrilátero infinitesimal na projeção e a área do quadrilátero infinitesimal correspondente na superfície de referência (Bugayevskiy e Snyder, 1995). Assim, de posse das áreas diferenciais das diferentes superfícies conforme as Eq. (133) e (136), nesse momento se pode obter o fator de escala para a área, aqui denominado de m_a , conforme a Eq. (137):

$$m_a = \frac{dA}{da} \quad (137)$$

Na Eq. (137), se a área no mapa for igual à área na esfera (ou no elipsoide), a projeção é equivalente (Pearson, 1990). Em outras palavras, a equivalência ocorre quando o fator de escala para a área é igual a 1. Algebricamente se pode escrever a Eq. (138):

$$\frac{dA}{da} = 1 \quad (138)$$

Substituindo as Eq. (133) e (136) na Eq. (138) chega-se nas Eq. (139) e (140):

$$\frac{\bar{H}d\varphi d\lambda}{hd\varphi d\lambda} = 1 \quad (139)$$

$$\frac{\bar{H}}{h} = 1 \quad (140)$$

A Eq. (140) é a condição de equivalência das projeções cilíndricas normais utilizando as primeiras quantidades fundamentais de Gauss.

9 CONDIÇÃO DE EQUIDISTÂNCIA

A equidistância refere-se à preservação das distâncias medidas em uma única direção. Essa propriedade só pode ser mantida ao longo de certas linhas ou a partir de pontos específicos. Quando as distâncias são conservadas ao longo dos meridianos, a projeção recebe o nome de equidistante meridiana; já quando essa conservação ocorre ao longo dos paralelos, a projeção é chamada de equidistante transversal (Gaspar, 2005).

Mais especificamente, segundo (Bugayevskiy e Snyder, 1995, p. 52) “Nas projeções cilíndricas normais equidistantes ao longo dos meridianos, a ordenada é determinada de modo que a escala ao longo de todos os meridianos seja preservada”. Essa condição pode ser representada matematicamente por meio das primeiras quantidades fundamentais de Gauss diretamente da Eq. (119), pois, fazendo $\alpha = 0^\circ$, se tem o fator linear de escala ao longo de um meridiano, que será chamado de m_m e igualá-lo a 1. Essas considerações podem ser vistas nas Eq. (141) e (142):

$$m_m^2 = \frac{\bar{E}}{e} \cos^2 0^\circ + \frac{\bar{G}}{g} \sin^2 0^\circ \quad (141)$$

$$\frac{\bar{E}}{e} = 1 \quad (142)$$

A Eq. (142) representa a condição de equidistância ao longo dos meridianos em relação às projeções

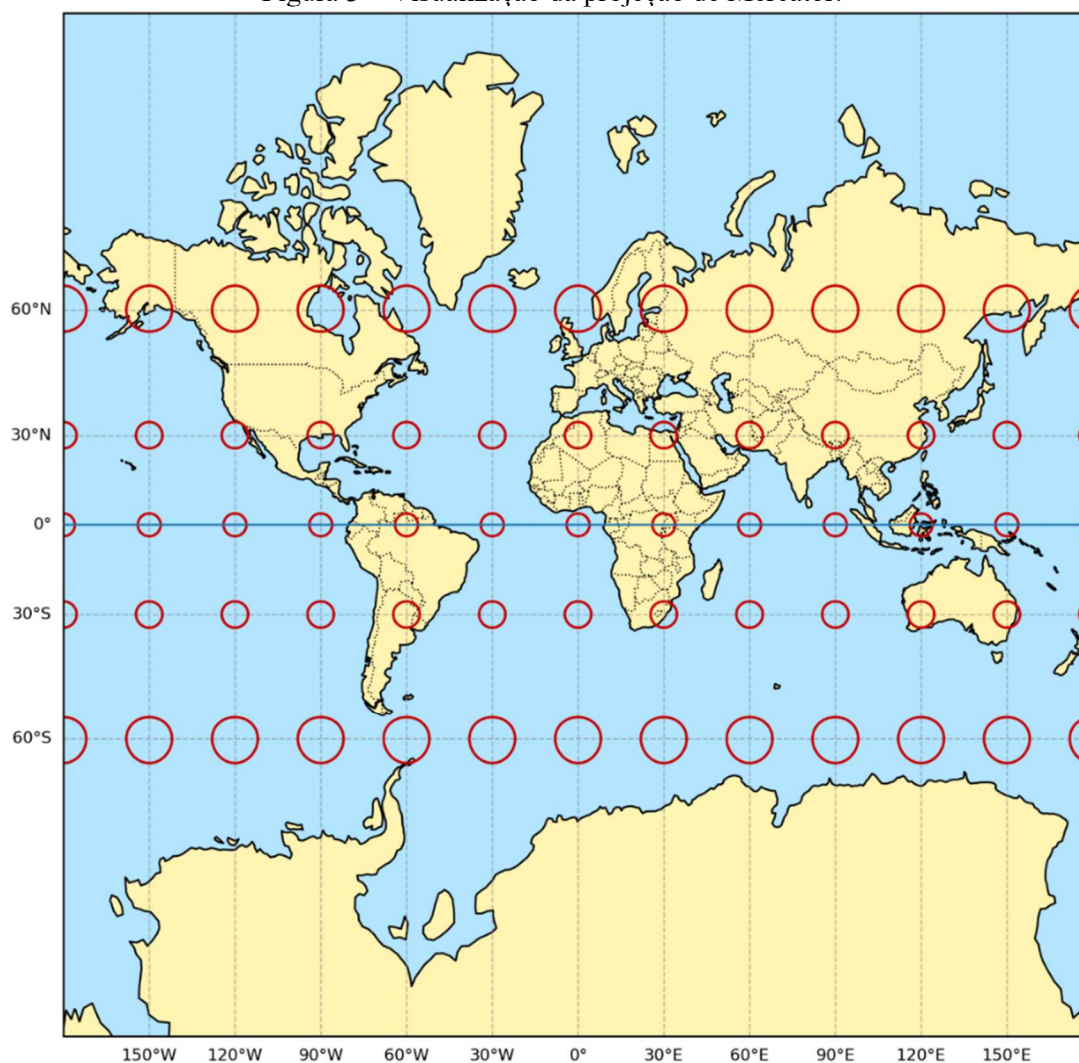
cilíndricas normais, em função das primeiras quantidades fundamentais de Gauss (Deakin, 2003). Uma vantagem desse tipo de projeção é que se alguém deseja reduzir simultaneamente as distorções de área e de forma, a projeção cilíndrica equidistante seria a melhor escolha (Györfy, 1990).

10 EXEMPLO PRÁTICO

Três projeções cilíndricas normais muito conhecidas e importantes, nomeadamente as projeções de Mercator, cilíndrica equivalente de Lambert, e Plate Carrée, podem exemplificar os três tipos de distorções analisadas neste artigo, evidenciando a importância de seu estudo. Tais projeções serão ilustradas em conjunto com elipses indicatrizes, com as respectivas análises de distorção, como ilustram as Figuras 3, 4 e 5.

A elipse indicatriz, proposta por Auguste Tissot no século XVIII, é um conceito central para compreender graficamente as deformações nas projeções cartográficas. Ele mostrou que qualquer representação de uma superfície pode ser vista como parte de diversas projeções ortogonais em escalas diferentes. Se um pequeno círculo da superfície original for tomado e projetado no plano, o processo envolve duas etapas: ajustar sua escala e realizar a projeção ortogonal. Como o plano do círculo geralmente está inclinado em relação ao plano de projeção, sua imagem se torna uma elipse. Admitindo que o círculo tenha raio unitário, obtém-se a elipse indicatriz ou elipse de deformação. Seus eixos a e b correspondem às direções principais da projeção, onde a escala assume seus valores máximo e mínimo (Gaspar, 2005). Elas são importantes no estudo das projeções cartográficas, tanto para ilustrar a distorção quanto para servir de base aos cálculos que representam precisamente sua magnitude em cada ponto (Kopacz, 2012).

Figura 3 – Visualização da projeção de Mercator.



Fonte: Os autores (2025).

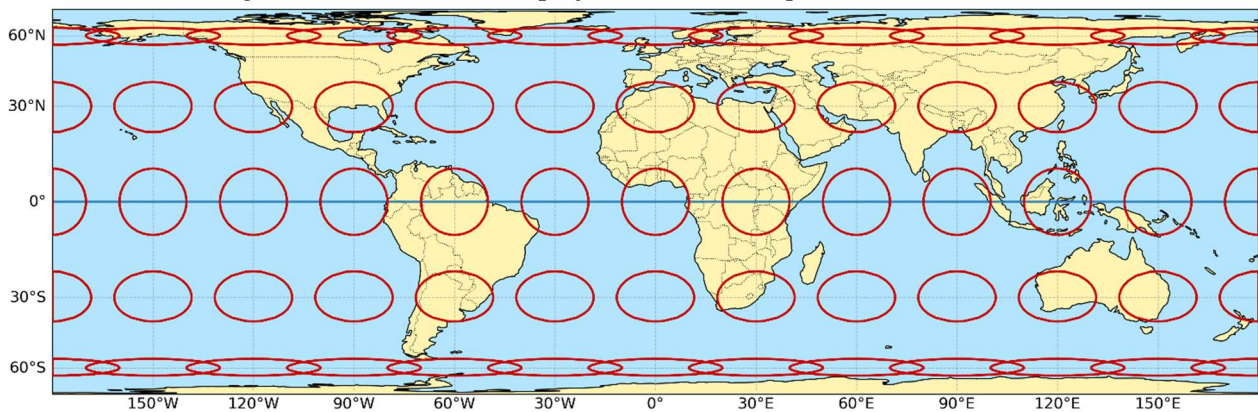
A projeção de Mercator foi apresentada em 1569 pelo cartógrafo de mesmo nome, com a finalidade principal de ser usada em navegação. Ela possui as seguintes características: é cilíndrica normal; é conforme; os meridianos são linhas retas igualmente espaçadas; os paralelos são linhas retas desigualmente espaçadas,

mais próximos entre si perto do Equador, cortando os meridianos em ângulos retos; a escala é verdadeira ao longo do Equador; os polos estão no infinito; há grande distorção de área nas regiões polares (Snyder, 1987). A Figura 3 ilustra o contorno dos continentes na projeção de Mercator, a partir de um script elaborado em Python e disponibilizado publicamente no repositório do GitHub (Data, 2025).

Na Figura 3 se pode observar que as elipses indicatrizes mantêm forma circular em todas as latitudes, pois a projeção é conforme, ou seja, preserva as formas locais. No entanto, o tamanho das elipses aumenta progressivamente à medida que se afastam do Equador, indicando distorção de área e distâncias nas latitudes maiores. Assim, embora as formas locais sejam representadas corretamente, as regiões mais afastadas do equador aparecem desproporcionalmente distorcidas em relação às regiões mais próximas dele.

Ressalta-se que uma projeção conforme preserva as formas locais, já que, por exemplo, um pequeno círculo no globo permanece circular no mapa. Contudo, essa propriedade tem limitações: a conformidade exige o aumento uniforme das escalas, fazendo a escala de área crescer com o quadrado dessa variação. Assim, embora as formas pequenas sejam bem representadas, o aumento rápido das distorções longe das zonas sem deformação torna as projeções conformes inadequadas para mostrar corretamente grandes regiões, como continentes e oceanos (Maling, 1992).

Figura 4 – Visualização da projeção cilíndrica equivalente de Lambert.



Fonte: Os autores (2025).

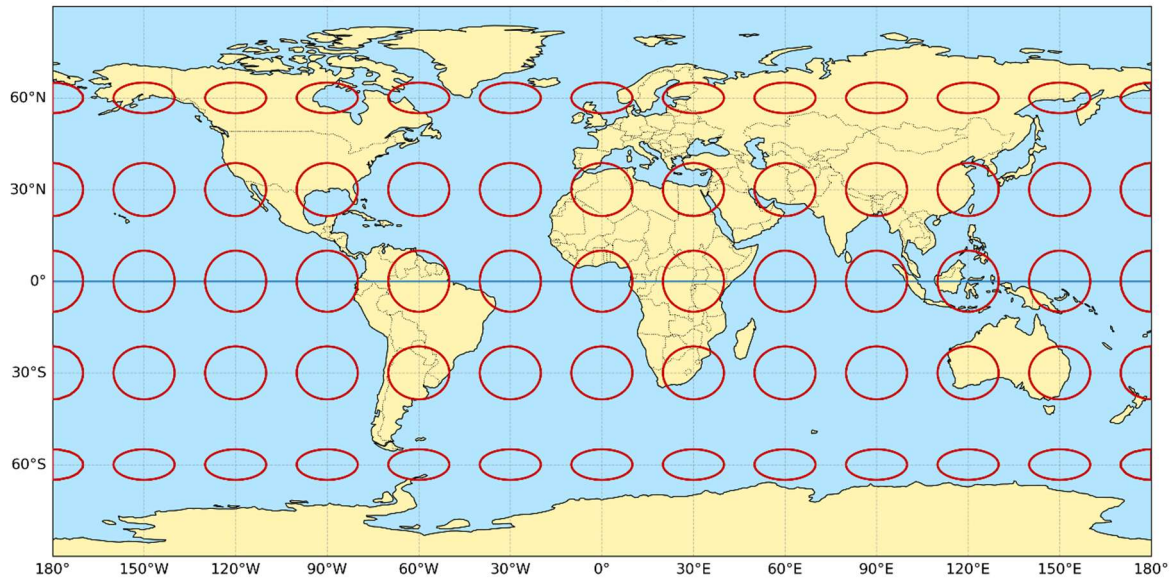
A projeção cilíndrica equivalente de Lambert foi apresentada pelo cartógrafo de mesmo nome em 1772, e em seu aspecto normal possui as seguintes características: meridianos são linhas retas com espaçamento igual; paralelos são linhas retas com espaçamento desigual, mais próximas perto dos polos, cortando os meridianos em ângulos retos; se tangente, a escala é verdadeira ao longo do Equador (Snyder, 1987). A Figura 4 ilustra o contorno dos continentes nesta projeção, a partir de um script elaborado em Python (Data, 2025).

Na projeção cilíndrica equivalente de Lambert, as elipses indicatrizes apresentam achatamento na medida do incremento da latitude, alongando-se progressivamente na direção Leste-Oeste. A distorção intensifica-se em regiões de latitudes elevadas, ocorrendo deformações significativas de distâncias e ângulos nessas regiões, embora a preservação da equivalência se mantenha.

De maneira geral, as projeções equivalentes têm grande relevância no mapeamento de distribuições estatísticas. Por exemplo, ao representar dados de população, agricultura ou indústria, pode-se utilizar diversos símbolos, como pontos, que indiquem quantidades específicas da variável analisada. Na leitura desse tipo de mapa, um fator essencial é a percepção visual da densidade populacional, da produção agrícola ou da atividade industrial, conforme essas variam entre diferentes regiões de um país ou continente (Maling, 1992).

A projeção cilíndrica equidistante é conhecida na Europa desde o século III a. C. No aspecto equatorial é a mais simples de construir de todas as projeções cartográficas. Quando o cilindro está em posição normal, e quando o Equador é o paralelo padrão, ela é conhecida com Plate Carrée, porque sua malha é quadrada (Gaspar, 2005). Essa projeção é cilíndrica; usada apenas na forma esférica; não é equivalente nem conforme; os meridianos e paralelos são linhas retas equidistantes entre si, que se cruzam em ângulos retos; e é muito usada para mapas mundiais ou regionais, pois possui construção simples (Snyder, 1987). A Figura 5 ilustra o contorno dos continentes na projeção Plate Carrée, a partir de um script elaborado em Python (Data, 2025).

Figura 5 – Visualização da projeção Plate Carrée.



Fonte: Os autores (2025).

Como ilustra a Figura 5, a característica de equidistância da projeção Plate Carrée preserva as distâncias ao longo dos meridianos. Isso pode ser visualizado pelas elipses indicatrizes, que nesse caso mantêm sua dimensão Leste-Oeste constante, mas se comprimem na direção norte-sul com o aumento da latitude, em razão do afastamento constante dos paralelos. Conseqüentemente, nas altas latitudes, as elipses aparecem comprimidas, revelando uma severa distorção de forma e área, que se torna máxima nas proximidades dos polos.

A propriedade de equidistância tem menor importância que a conformidade ou a equivalência, já que não costuma ser desejável um mapa em que as distâncias sejam exatas apenas em uma direção. Mesmo assim, as projeções equidistantes funcionam como uma solução intermediária entre as projeções conformes e as equivalentes. Nessas projeções, a variação da escala de área ocorre mais progressivamente em relação às projeções conformes, e a deformação angular máxima cresce de forma mais gradual que nas equivalentes. Por isso, elas são frequentemente aplicadas em mapas de atlas, de planejamento e em representações extensas da superfície terrestre, quando não é indispensável preservar a conformidade nem a equivalência (Maling, 1992).

Ressalta-se também que, no caso dessas três projeções, existe uma relação direta entre a grade de coordenadas e o padrão de distorção. Isso significa que a grade possui os mesmos eixos de simetria que o padrão de distorção. Isso ocorre porque, no aspecto normal, as linhas de mesma distorção coincidem com os paralelos. No caso da projeção cilíndrica, a linha de distorção nula corresponde ao equador. Por isso, o aspecto normal dessa classe de projeções é conhecido como aspecto equatorial (Canters e Decler, 1989).

11 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este artigo deduziu, usando as primeiras quantidades fundamentais de Gauss, as condições de conformidade, equivalência e equidistância de projeções cilíndricas normais e tangentes à superfície de referência ao longo do equador.

Como tais projeções apresentam distorção constante ao longo dos paralelos, elas são uma boa escolha para zonas simétricas em relação ao equador (Kerkovits, 2021). Além disso, ao terem o cilindro desenvolvido, elas mostram um mapa em que os meridianos são representados por linhas retas paralelas entre si, cuja distância é proporcional à correspondente diferença de longitude. Os paralelos são linhas retas perpendiculares às anteriores e, portanto, também paralelas entre si. Contudo, foram apresentados três tipos de projeções, se diferenciando em razão de uma ser conforme (projeção de Mercator), outra equivalente (projeção equivalente de Lambert) e outra equidistante meridiana (Plate Carrée). O que garantiu essas características foi a matemática envolvida, que estabeleceu condições para determinada propriedade.

Ocorre que, como este artigo reforçou, a compreensão adequada das afirmações acima depende diretamente de um conhecimento intermediário/avançado de matemática. Porém, uma vez adquirido, tal conhecimento se mostra vantajoso para aqueles que trabalham diretamente com a elaboração de mapas. Isso fica claro no exemplo aplicativo, em que três projeções foram ilustradas, juntamente com as elipses indicatrizes, a partir de um programa em Python, que exigiu plena consciência dos conceitos envolvidos e da matemática necessária, todos relativos às características específicas de cada projeção, durante a sua elaboração.

12 REFERÊNCIAS

- Bugayevskiy, L. M., Snyder, J. P. (1995). *Map Projections, a Reference Manual*. Taylor & Francis Ltd, London.
- Canters, F., Declair, H. (1989). *The World in Perspective, a Directory of World Map Projections*. John Wiley & Sons, New York.
- Carmo, M. P. (2016). *Differential Geometry of Curves and Surfaces: Revised & Updated Second Edition*. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey.
- Data (2025). *Data-cartographic-projections*. GitHub. <https://github.com/Data92repository/Data-cartographic-projections>.
- Deakin, R. E. (2003). *Map Projection Theory*. RMIT University, Melbourne.
- Ghaderpour, E. (2016). Some Equal-area, Conformal and Conventional Map Projections: A Tutorial Review. *Journal of Applied Geodesy* 2016; 10(3): 197–209.
- Gaspar, J. A. (2005). *Cartas e Projeções Cartográficas* 3ª edição. Lidel, edições técnicas Ltda, Lisboa.
- Gauss, C. F. (1902). General Investigations of Curved Surfaces. Translated with notes and a bibliography by James Caddall Morehead, and Adam Miller Hildebeitel. The Princeton University Library.
- Györfy, J. (1990). Anmerkungen zur Frage der Besten Echten Zylinderabbildungen. *Kartographische Nachrichten* 40(4), pp. 140–146.
- Kerkovits, K. (2021). Best Cylindrical Map Projections According to the Undesirability of Angular and Areal Distortions. *Advances in Cartography and GIScience of the International Cartographic Association*, 3, 2021. 30th International Cartographic Conference (ICC 2021), 14–18 December 2021, Florence, Italy. <https://doi.org/10.5194/ica-adv-3-8-2021>.
- Kessler, F.C. (2025). Map Projections don't Have to be Hard. *Cartographic Perspectives*. Number 106, 2025. DOI: 10.14714/CP106.2029.
- Kessler, F. C., Battersby, S. E. (2019). *Working with Map Projections: A Guide to Their Selection*. CRC Press, Boca Raton.
- Kopacz, P. (2012). On Geometric Properties of Spherical Conics and Generalization of π in Navigation and Mapping. *Geodesy and Cartography*, 2012 Volume 38(4): 141–151, DOI:10.3846/20296991.2012.756995.
- Krakiwsky, E. J. (1973). *Conformal Map Projections in Geodesy*. Technical Report n° 217. Department of Geodesy and Geomatics Engineering, University of New Brunswick, Fredericton.
- Lapaine, M. (2021). Local Linear Scale Factors in Map Projections of an Ellipsoid. *Geographies*, 2021, 1, 238–250. <https://doi.org/10.3390/geographies1030014>.
- Lapaine, M. (2025). A New Derivation of the Formula for the Length of a Loxodrome Arc on a Sphere Using Cylindrical Projections. *ISPRS Int. J. Geo-Inf.* 2025, 14, 137. <https://doi.org/10.3390/ijgi14040137>.
- Maling, D. H. (1992). *Coordinate Systems and Map Projections, second edition*. Pergamon Press, Oxford.
- Melluish, R. K. (2014). *An Introduction of Mathematics of Map Projections*. Cambridge University Press, Cambridge: first paperback edition 2014.
- Meyer, T. H. (2018). *Introduction to Geometrical and Physical Geodesy: Foundations of Geomatics*. ESRI press, Redlands.
- Mocnik, F. B. (2025). Compromise Projections for World Maps – An Optimization Approach Using Discrete Global Grid Systems and Principles from Classical Mechanics. *International Journal of Digital Earth* 2025, Vol. 18, n°. 1, 2369636. <https://doi.org/10.1080/17538947.2024.2369636>.
- Novikova, E. (2025). *Best Map Projections*. Springer Nature Switzerland AG 2025.
- Pearson, I. (1990). *Map Projections Theory and Applications*. CRC Press, Boca Raton.
- Ramos Junior, I., Seixas, A., Garnés, S. J. A., Calado, L. G. L. P. (2025). Mercator Projection on the Sphere, a Deduction Without Mathematical Gap. *Mercator, Fortaleza*, v. 24, june 2025. <https://doi.org/10.4215/rm2025.e24014>.
- Richardus, P., Adler, R. K. (1972). *Map projections for geodesists, cartographers and geographers*. North-Holland Publishing Company, Amsterdam.
- Roblin, H. S. (1969). *Map Projections*. Edward Arnold (Publishers) Limited.

- Santos, A. A. (1985). *Representações Cartográficas*. Editora Universitária da Universidade Federal de Pernambuco, Recife.
- Snyder, J. P. (1987). *Map Projections, a Working Manual*. United States Geological Survey Professional Paper 1395. United States Government Printing Office, Washington.
- Tobler, W. R. (1962). A Classification of Map Projections. *Annals of the Association of American Geographers*, vol 52: p-p 167-175.

Afiliação dos Autores

- Ramos Junior, I. – Professor na Universidade Federal do Pampa, Itaqui (RS), Brasil.
- Silveira, L. N. – Professor na Universidade Federal do Pampa, Itaqui (RS), Brasil.
- Martins, V. B. – Professor na Universidade Federal do Pampa, Itaqui (RS), Brasil.
- Seixas, A. – Professor na Universidade Federal de Pernambuco, Recife (PE), Brasil.
- Garnés, S. J. A. – Professor na Universidade Federal de Pernambuco, Recife (PE), Brasil.
- Calado, L. G. L. P. – Professor na Universidade Federal de Pernambuco, Recife (PE), Brasil.
- Airoidi, P. A. B. – Discente de Graduação na Universidade Federal do Pampa, Itaqui (RS), Brasil.

Contribuição dos Autores

- Ramos Junior, I. – O autor contribuiu na concepção do texto, na manipulação dos dados, na redação e na revisão.
- Silveira, L. N. – O autor contribuiu na concepção do texto, na manipulação dos dados, na redação e na revisão.
- Martins, V. B. – O autor contribuiu na concepção do texto, na manipulação dos dados, na redação e na revisão.
- Seixas, A. – O autor contribuiu na concepção do texto, na manipulação dos dados, na redação e na revisão.
- Garnés, S. J. A. – O autor contribuiu na concepção do texto, na manipulação dos dados, na redação e na revisão.
- Calado, L. G. L. P. – O autor contribuiu na concepção do texto, na manipulação dos dados, na redação e na revisão.
- Airoidi, P. A. B. – O autor contribuiu na manipulação dos dados e na redação.

DECLARAÇÃO DE CONFLITO DE INTERESSES

Os autores declaram que não há conflito de interesses com este artigo.

Declaração de disponibilidade de dados da pesquisa

Todo o conjunto de dados de apoio aos resultados deste estudo foi publicado no próprio artigo.

Este preprint foi submetido sob as seguintes condições:

- Os autores declaram que os necessários Termos de Consentimento Livre e Esclarecido de participantes ou pacientes na pesquisa foram obtidos e estão descritos no manuscrito, quando aplicável.
- Os autores declaram que a elaboração do manuscrito seguiu as normas éticas de comunicação científica.
- Os autores declaram que estão cientes que são os únicos responsáveis pelo conteúdo do preprint e que o depósito no SciELO Preprints não significa nenhum compromisso de parte do SciELO, exceto sua preservação e disseminação.
- Os autores declaram que os dados, aplicativos e outros conteúdos subjacentes ao manuscrito estão referenciados.
- O manuscrito depositado está no formato PDF.
- Os autores declaram que a pesquisa que deu origem ao manuscrito seguiu as boas práticas éticas e que as necessárias aprovações de comitês de ética de pesquisa, quando aplicável, estão descritas no manuscrito.
- Os autores declaram que uma vez que um manuscrito é postado no servidor SciELO Preprints, o mesmo só poderá ser retirado mediante pedido à Secretaria Editorial do SciELO Preprints, que afixará um aviso de retratação no seu lugar.
- Os autores concordam que o manuscrito aprovado será disponibilizado sob licença [Creative Commons CC-BY](#).
- O autor submissor declara que as contribuições de todos os autores e declaração de conflito de interesses estão incluídas de maneira explícita e em seções específicas do manuscrito.
- Os autores declaram que o manuscrito não foi depositado e/ou disponibilizado previamente em outro servidor de preprints ou publicado em um periódico.
- Caso o manuscrito esteja em processo de avaliação ou sendo preparado para publicação mas ainda não publicado por um periódico, os autores declaram que receberam autorização do periódico para realizar este depósito.
- O autor submissor declara que todos os autores do manuscrito concordam com a submissão ao SciELO Preprints.