

Estado da publicação: O preprint não foi publicado em outro meio.

A relação entre massa e energia na Teoria da Relatividade Especial: Sobre a história da elaboração de $E = mc^2$

Vinícius Carvalho da Silva, Wellington Pereira de Queirós, Clair de Luma Capiberibe Nunes

<https://doi.org/10.1590/SciELOPreprints.13981>

Submetido em: 2025-12-12

Postado em: 2025-12-18 (versão 1)

(AAAA-MM-DD)




A relação entre massa e energia na Teoria da Relatividade Especial:

Sobre a história da elaboração de $E = mc^2$.


The relation between mass and energy in the Theory of Special Relativity:

On the history of the formulation of $E = mc^2$.


Vinícius Carvalho da Silva

 <https://orcid.org/0000-0002-1061-2727>

Wellington Pereira de Queirós

 <https://orcid.org/0000-0002-9734-7136>

Clair de Luma Capiberibe Nunes

 <https://orcid.org/0000-0002-6536-3131>

Resumo: Este artigo desmistifica a origem da equação $E = mc^2$, mostrando que ela não foi proposta por Einstein em 1905 na forma como a conhecemos hoje. Em vez disso, a relação massa-energia emergiu gradualmente por meio de refinamentos conceituais, contribuições de vários cientistas e mudanças notacionais significativas. No artigo de 1905, Einstein expressou a ideia verbalmente e com símbolos diferentes, como $L = mV^2$, afirmando que a massa de um corpo é uma medida do seu conteúdo de energia. Discussões anteriores feitas por Henri Poincaré em 1900 e Friedrich Hasenöhrl em 1904 já abordavam conceitos relacionados à inércia eletromagnética e à relação massa-energia. Einstein inicialmente utilizou L para energia e V para a velocidade da luz, adotando E e c apenas por volta de 1912 em um manuscrito não publicado. A forma simplificada $E = mc^2$ só ganhou destaque na década de 1940, impulsionada pelo Projeto Manhattan e pela cultura popular. O artigo distingue representação simbólica e significado físico, enfatizando que a essência conceitual da equação já estava presente em 1905, enquanto sua notação moderna surgiu apenas décadas depois. As implicações epistemológicas e historiográficas revelam como o conhecimento científico evoluiu de maneira gradual e coletiva, destacando o papel unificador de Einstein dentro de um contexto histórico mais amplo.

Palavras-chave: Einstein; $E = mc^2$; Relatividade Restrita; História da Física; Massa-Energia.

Abstract: This article demystifies the origin of the equation $E = mc^2$, showing that it was not proposed by Einstein in 1905 in the form we know today. Instead, the mass-energy relationship emerged gradually through conceptual refinements, contributions from several scientists, and significant notational changes. In the 1905 paper, Einstein expressed the idea verbally and with different symbols, such as $L = mV^2$, stating that the mass of a body is a measure of its energy content. Earlier discussions by Henri Poincaré in 1900 and Friedrich Hasenöhrl in 1904 had already addressed concepts related to electromagnetic inertia and mass-energy relationship. Einstein initially used L for energy and V for the speed of light, adopting E and c only around 1912 in an unpublished manuscript. The simplified form $E = mc^2$ only gained prominence in the 1940s, driven by the Manhattan Project and popular culture. The article distinguishes between symbolic representation and physical meaning, emphasizing that the conceptual essence of the equation was already present in 1905, while its modern notation emerged only decades later. The epistemological and historiographical implications reveal how

scientific knowledge evolves gradually and collectively, highlighting Einstein's unifying role within a broader historical context.

Keywords: Einstein; $E=mc^2$; Special Relativity; History of Physics; Mass-Energy

A Equação das equações

Dentre todas as equações mais conhecidas nas ciências formais e naturais, da área do círculo, $A = \pi r^2$, passando pelo teorema de Pitágoras, $a^2 + b^2 = c^2$, da segunda lei de Newton, $F = ma$, passando por tantas outras, como a equação de Schrödinger, seguramente podemos afirmar, seguindo Peter Galison em *The Sextant Equation* que a equação mais conhecida de todos os tempos é aquela que estabelece, no escopo da relatividade restrita, a relação entre massa e energia¹, tão familiar por toda parte em sua forma simples e elegante: $E = mc^2$.

Acerca de tão emblemática equação, diversas considerações, de múltiplas dimensões ou “camadas”, podem ser feitas. Sem nenhuma intenção de esgotar o campo de possibilidades, vejamos algumas:

1. Em sentido **físico** a equação expressa um importante capítulo da história do ideal e das práticas de unificação na Física Teórica, estabelecendo uma relação profunda entre energia e massa. Unificar aqui não significa necessariamente formular um novo conceito (ou modelo, teoria etc.) que sintetize dois ou mais conceitos até então independentes ou mesmo desconexos, mas, de um modo mais geral, reduzir a complexidade aparente de fenômenos ou grandezas físicas a uma causa ou ideia única e simples. Ao estabelecer a relação entre massa e energia, a nova teoria encontra um fundo comum, ou mais do que isso, desvela uma relação simples, entre duas entidades até então concebidas como irredutíveis uma à outra.
2. Ainda em sentido **físico**, mas indo além, em sentido **metafísico** – ou mais especificamente **ontológico** – a relação entre massa e energia não pode ser desenvolvida sem que o problema da natureza do espaço e do tempo seja colocado. A teoria exige o abandono dos conceitos de Espaço e Tempo Absolutos defendidos por Newton no *Principia*. Igualmente a teoria nos exige uma investigação acerca das constantes físicas, sobretudo da velocidade da luz, c .

¹ Nos referiremos sempre como “relação massa-energia”, ao chamado “princípio de equivalência”, conforme a posição adotada em [1; 2].

3. Com repercussões **físicas, filosóficas e sociológicas**, devemos pontuar que por conta de 1 e 2 podemos afirmar que a teoria em que a relação massa-energia ocorre, e a relação por si mesma, representam a elaboração de uma nova cosmovisão, isto é, de uma nova imagem física da natureza. O nascimento dessa nova concepção acerca da natureza e da estrutura do mundo teria implicações científicas e sociais profundas, da origem da cosmologia enquanto ciência física no século XX à ascensão de Einstein ao posto de celebridade mundial ao longo das décadas que se seguiram a publicação do trabalho. A ciência ganharia enorme popularidade, e a imagem de Einstein tornar-se-ia icônica para a indústria cultural.
4. Para condensar vários pontos em um, em sentido **geopolítico, macroeconômico, político e institucional**, o trabalho de Einstein participou do desenvolvimento da indústria nuclear bélica e civil, culminando na produção de armas nucleares por um lado, e de uma nova matriz energética, por outro; a física nuclear experimentaria grande impulso em sua institucionalização, recebendo recursos volumosos em todo mundo, o que impactou a divisão social do trabalho do mundo da física. A economia, a indústria, a política e as relações internacionais do século XX seriam marcadas pelo desenvolvimento da indústria nuclear [3, 4]. Se é bem verdade que Einstein não participou ativa e diretamente do desenvolvimento de tal indústria, é inegável que seu trabalho em física teórica está em sua base – como apontam relatórios do Projeto Manhattam e inúmeros trabalhos da literatura especializada sobre o tema [3, 4].

Não seguiremos listando as múltiplas dimensões do trabalho de Einstein, e como ele afetou não somente a física, mas outras áreas do conhecimento e da cultura. No momento queremos tratar especificamente de duas questões. (1). Como Einstein chegou relação massa–energia? e (2). Quando ela foi expressa pela primeira vez sob a forma da famosa equação $E = mc^2$?

O desenvolvimento histórico de $E = mc^2$

Poder-se-ia argumentar que a escassez de estudos sobre a relatividade restrita contribui para o equívoco comum de considerar que a famosa equação, na forma $E = mc^2$, foi publicada pela primeira vez em 1905, o ano miraculoso de Einstein, quando, na verdade, ela não se encontra em nenhum trabalho daquele ano, e nem mesmo dos anos

imediatamente subsequentes. Seria, no entanto, um engodo defender tal posição. Isto porque mesmo estudando – ou talvez justamente por “estudarmos” sobre a relatividade restrita e mais especificamente a relação massa-energia, somos levados a pensar, sem nenhuma problematização, que de fato a equação aparece no artigo de 1905.

Há um enorme número de fontes que simplesmente registra afirmações do tipo “No trabalho sobre a relatividade restrita de 1905 Einstein estabelece que $E = mc^2$...”. Tomemos como exemplo o que nos diz David Bodanis, em *E = mc²: Uma biografia da equação que mudou o mundo e o que ela significa*: “Quando Einstein publicou $E = mc^2$ em 1905, a equação foi, inicialmente, quase inteiramente ignorada. Simplesmente não se ajustava àquilo que a maioria dos outros cientistas estava fazendo” [5: 83]. O leitor sai com a “informação” clara e direta do ano de nascimento da equação. Ocorre, no entanto, como já o dissemos, que essa afirmação muito popular está equivocada. Conforme Galison:

Surprisingly enough, in Einsteins’s first paper he did not use *E* for *Energie* or *Energia* in German and Greek respectively, and *c* for *celeritas* (swift in Latin), but rather *L* for energy (surely after *lebendige Kraft* ‘living’ or kinetic energy) and *V* for the velocity of lighth. Although the particular symbols of $E = mc^2$ feel inevitable to us now that we have grown used to those particular symbols, Einstein settled on the *E* and *c* only in 1912 [6: 29].²

Se substituirmos a notação de 1912 pela de 1905, temos $L = mV^2$. Deste modo, certamente, a primeira formulação da equação é bastante diferente daquela que conhecemos. No entanto, é preciso problematizar ainda mais a questão. $L = mV^2$ tampouco aparece no trabalho. Não é o caso de uma simples mudança notacional. O caminho até a forma simplificada da equação, independente dos símbolos usados, não estava de fato devidamente pavimentado àquela altura. O problema não é saber, somente, qual a forma simbólica da equação em 1905, mas qual o conteúdo físico expresso, independente da forma simbólica³. Enfim, qual era a ideia central, e como estava sendo

² Em uma tradução livre: “Surpreendentemente, em seus primeiros artigos, Einstein não usou *E* para *Energie* ou *Energia* em alemão e grego respectivamente, e *c* para *celeritas* (*swift* em latim), mas sim *L* para energia (certamente após *lebendige Kraft* ou energia cinética) e *V* para a velocidade da luz. Embora os símbolos particulares de $E = mc^2$ pareçam inevitáveis para nós agora que crescemos utilizando-os, Einstein decidiu-se pelo *E* e *c* apenas em 1912”.

³ Tomamos forma simbólica e forma lógica em acepções distintas. Como exemplo vejamos o caso de uma proposição universal afirmativa do tipo “Todo S é P”. Por convenção, digamos que a representação de tal proposição seja $S(p)$. Se mudarmos os símbolos que representam sujeito e predicado e preservarmos a forma de representação, poderemos ter algo como $x(q)$ ou $a(b)$. Nesse caso teríamos variações na forma simbólica, mas não na forma lógica, pois exatamente o mesmo conteúdo lógico estaria sendo representando por meio

germinada? Em 1905 Einstein publicou cinco artigos. A teoria da relatividade é apresentada no terceiro, e no quarto, que é um adendo àquele. Não há uma única equação no trabalho que seja propriamente a primeira formulação de $E = mc^2$, o que há é a elaboração da relação massa-energia, do qual a equação pode ser deduzida, considerando a diferença notacional que já abordamos. O filósofo e historiador da ciência Robert Crease desenvolve bem a ideia em *As grandes equações*:

Einstein empregava, mais uma vez [1905], a notação pouco familiar de L para energia e V para velocidade da luz:

“Se um corpo libera a energia L na forma de radiação, sua massa diminui de L/V^2 . Como aqui não é essencial que a energia retirada do corpo se transforme em energia da radiação nem em qualquer outra forma de energia, chegamos a uma conclusão mais geral: **a massa de um corpo é uma medida de seu conteúdo de energia**”.

Essa foi a primeira aparição impressa da ideia que eventualmente ficaria famosa como $E = mc^2$. Ela não é apresentada explicitamente sob a forma de uma equação, nem figura com aqueles símbolos familiares. Ainda assim, o surpreendente – até revolucionário – conceito massa-energia já está totalmente articulado [grifos nossos] [7: 150].

Vejamos, nas palavras do próprio Einstein, o que ele nos diz em seu artigo “A inércia de um corpo depende de seu conteúdo de energia?”:

A massa de um corpo é uma medida do seu conteúdo de energia; se a energia muda de L , a massa muda no mesmo sentido de $L/9.10^{20}$, sendo a energia medida em ergs, e a massa, em gramas ⁴ [8: 641].

Embora seja considerado “revolucionário” e não sem razão, o trabalho de Einstein até $E = mc^2$ não pode ser compreendido como um movimento isolado na história da física. Conforme John Stachel “A ideia de que a massa inercial está associada com a energia eletromagnética foi muitas vezes discutida antes de 1905” [9]

Por exemplo, conquanto Hertz não tenha enunciado uma relação entre massa e energia, a relação entre ambas estava clara em sua imagem mecânica do mundo. Assim, em seus *Princípios* de 1894 ele escreveu:

da mesma forma - a partir do mesmo formalismo, com o mesmo número de elementos – havendo apenas uma diferença de notação entre os casos. Nesse sentido $L = mV^2$ e $E = mc^2$ possuem a mesma forma lógica, mas não a mesma forma simbólica. No limite, poderíamos dizer que a diferença entre duas formas simbólicas para a mesma forma lógica é, a rigor, estética, ou uma “convenção estética”. Já a diferença entre duas formas lógicas pode expressar diferenças mais profundas e substanciais, revelando maior economia, simplicidade, elegância de uma forma em relação à outra. No presente caso a diferença pode “atingir”, até mesmo, o conteúdo físico, pois o número de termos, hipóteses auxiliares e relações lógicas representam, ao fim e ao cabo, relações físicas e não apenas reações lógicas ou matemáticas puras.

4 No original em alemão: “Die Masse eines Körpers ist ein Maß für dessen Energiegehalt; ändert sich die Energie um L , so ändert sich die Masse in demselben Sinne um $L/9.10^{20}$, wenn die Energie in Erg und die Masse in Grammen gemessen wird”.

Como na primeira imagem, aqui partimos também de quatro conceitos fundamentais independentes, cujas relações entre si devem formar o conteúdo da mecânica. Dois deles tem caráter matemático: espaço e tempo. Os outros dois, massa e energia, são introduzidos como entidades físicas existentes (...) É evidente que a quantidade de energia que está ligada a uma massa determinada depende do estado dessa massa” [11: 91].

Abraham País, em sua biografia de Einstein, aponta inúmeros precursores seus, além de Maxwell, dentre os quais destacam-se Hertz, Lorentz e Poincaré. Para País, Einstein conhecia parte da literatura científica sobre o eletromagnetismo, o éter e a relação massa – energia antes de 1905. Por exemplo, “conhecia o artigo de 1895 de Lorentz, em que a experiência de Michelson-Morley é longamente discutida”. Mas ainda de acordo com País, “desconhecia as transformações de Lorentz” [12: 152]. Para o físico e biógrafo de Einstein, é bastante razoável supor que Einstein conhecesse o trabalho de Poincaré⁵ de um modo mais profundo do que geralmente se supõe:

Creio, portanto, que antes do primeiro artigo sobre a relatividade Einstein tinha conhecimento do discurso de Paris, no qual Poincaré sugeriu que a ausência de qualquer evidência de movimento relativamente ao éter deveria verificar-se em todas as ordens de v/c e que “o cancelamento dos termos [dependentes da velocidade] será rigoroso e absoluto”. (...) Sublinho que Einstein e os amigos fizeram muito mais do que passar os olhos pelos escritos de Poincaré. [12].

A historiografia da relatividade restrita [13-16] evidencia que a primeira formulação da relação entre massa e energia remonta a uma publicação de Henri Poincaré em 1900. Nesse trabalho, Poincaré introduz o conceito de inércia associada à energia com o propósito de compatibilizar o princípio da ação e reação com a eletrodinâmica desenvolvida por Lorentz.

5 A relação entre Einstein, Lorentz e Poincaré volta a ser discutida por País no capítulo 8, “O limiar da história”, de ‘Sutil é o Senhor: A ciência e a vida de Albert Einstein’, nele, País enfatiza que, apesar de Einstein conhecer parte da literatura de Poincaré antes de 1905, permaneceu, muito provavelmente, desconhecendo os artigos de Poincaré, bem como outros trabalhos, de Lorentz por exemplo, nos anos subsequentes, dentre outras razões “pelas dificuldades em obter livros e revistas” e pelo fator pessoal de que por um traço de personalidade, Einstein parecia, de fato, alheio ao que era publicado no mundo da física de seu tempo [12: 191-192]. Para País, no entanto, embora a questão do quanto Einstein realmente sabia dos trabalhos de seus precursores não possa encontrar a devida resposta, isso não nos impede de apreciar o artigo de Einstein, de 1905, como de fato, o pioneiro da relatividade: “A descrição dos precursores de Einstein termina aqui, numa nota de indecisão. As transformações de Lorentz tinham sido escritas. A simultaneidade tinha sido questionada. A velocidade da luz como velocidade-limite tinha sido conjecturada, mas, antes de 1905, não existia uma teoria da relatividade” [12: 143-147].

Posteriormente, em 1904, Hasenöhrl conduziu um estudo no qual demonstrou que uma caixa com paredes espelhadas, preenchida com luz em seu interior, apresentaria maior inércia em comparação a uma caixa vazia, ampliando as discussões acerca da relação entre energia e massa no contexto da física teórica⁶.

Ademais, conforme enfatiza Stachel, “por volta da virada do século, sugeriu-se que todos os conceitos mecânicos poderiam ser deduzidos dos conceitos do eletromagnetismo”, tentativas que se concentrariam, por exemplo, na associação entre a massa de uma entidade e o campo eletromagnético correspondente: “Em particular, houve tentativas de deduzir a massa inercial total do elétron a partir da energia associada com seu campo eletromagnético” [9]⁷. Nos artigos de 1905, nas palavras de Crease, o “conceito massa-energia” encontra-se “totalmente articulado”, embora não somente o símbolo, mas a forma da equação não estivesse plenamente desenvolvida:

Nos anos seguintes, Einstein fez várias referências a esse resultado, mas sempre usando descrições ou símbolos originais, nunca a fórmula famosa. (...) No começo de 1907, num artigo no *Annalen*, ele fazia referência à energia como ϵ , à massa como μ , e à velocidade da luz como V , e usava a equação

6 Por outro lado, permanece incerto se Einstein tinha conhecimento das discussões prévias acerca da relação massa-energia ao publicar seus ensaios em 1905. Tal lacuna na historiografia suscita questionamentos sobre a extensão da influência de trabalhos anteriores, como os de Poincaré e Hasenöhrl, na formulação das ideias presentes na obra de Einstein. Sabemos, no entanto, do interesse de Einstein, desde a juventude, nos anos de *Academia Olympia* pela obra científica e filosófica de Poincaré. Peter Galison, por exemplo, em “Os Relógios de Einstein e os Mapas de Poincaré”, nos lembra que *A Ciência e a Hipótese* foi uma das obras lidas pelos olímpicos, e que tal leitura os impactara fortemente [17: 240]. Para uma maior compreensão da recepção da filosofia de Poincaré pelos olímpicos por meio da tradução em língua alemã (e a questão da tradução do francês para o alemão aqui não é nada trivial), bem como para as influências e também as divergências e diferenças de pensamento entre Einstein e Poincaré, com relação a existência ou utilidade conceitual do éter luminífero, dentre outros pontos recomendamos a seção “Instrumentos Teóricos” do capítulo 5 “Os Relógios de Einstein”, da referida obra de Galison.

⁷ Pontuamos que, nesse sentido, o trabalho de Einstein se insere claramente naquela tradição de unificação da física que marca a história de tal ciência, característica bem assinalada também por Crease: “Ele transformou algumas das noções mais fundamentais sobre como se forma o Universo. Uniu duas coisas que há muito se julgava serem diferentes: a energia, cujo princípio de conservação foi o ápice da física do século XIX, e a massa, cujo princípio de conservação foi o auge da física do século XVIII [7]. Em linhas gerais, os entendimentos de Crease e Stachel são convergentes. O trabalho de Einstein é marcado por essa busca por unificação. Para Stachel, a grande ambição intelectual de Einstein sempre foi alcançar uma “unificação teórica de todos os fenômenos aparentemente disparatados da física” [7]. Em inúmeras ocasiões Einstein expressou esse projeto. Em *Física e Realidade* o físico filósofo diz que a física deve buscar, enquanto isso for possível, “a unidade lógica na imagem do mundo” [18: 58] Em *A Evolução da Física*, escrito com Infeld, vai além, e defende que essa busca por unidade é a característica central, o princípio guia, de toda a história da ciência, ao afirmar que dos filósofos gregos antigos à ciência moderna a filosofia natural se identifica como essa tentativa de reduzir a complexidade dos fenômenos físicos aparentes a causas únicas, simples e inteligíveis [19: 63]. Mais uma vez, Einstein se insere em uma tradição filosófica. A busca por unidade é um ideal comum, partilhado por filósofos naturais desde tempos remotos. Nas palavras de Planck em *A unidade da concepção do Universo na física*: “Desde que existe uma ciência da natureza, nós lhe atribuímos como maior finalidade agrupar numa síntese sistemática a prodigiosa diversidade dos fenômenos físicos e até, se possível, condensá-la numa fórmula única” [20: 59].

$$\epsilon = \mu V^2 \frac{1}{\sqrt{1 - (v/V)^2}}$$

Aqui a famosa equação – energia é igual a massa vezes velocidade da luz ao quadrado - aparece com o fator de correção β , levando em conta que o corpo está em movimento [7: 150-151].

O artigo citado por Crease é *Sobre a inércia da energia requerida pelo princípio da relatividade*. Nele, Einstein já estabelece uma relação entre massa-energia logo no primeiro tópico, ao afirmar que “Um aumento na energia do corpo, ΔE , deve corresponder sempre a um aumento da massa, $\Delta E/V^2$, em que V denota a velocidade da luz”⁸ [10: 371]. Um pouco mais adiante a equação citada por Crease é introduzida. Há uma leve diferença gráfica entre o que está publicado no livro de Crease, em que lemos $(v/V)^2$, e o ensaio de 1907 de Einstein, no qual encontramos $(\frac{v}{V})^2$:

Während man nun in der klassischen Mechanik die willkürliche Konstante in dieser Gleichung am bequemsten verschwinden läßt, erhält man in der Relativitätsmechanik den einfachsten Ausdruck für ϵ , Während man nun in der klassischen Mechanik die willkürliche Konstante in dieser Gleichung am bequemsten verschwinden läßt, erhält man in der Relativitätsmechanik den einfachsten Ausdruck für ϵ_0 für den ruhenden Massenpunkt μV^2 gesetzt wird. Man erhält dann.

$$\epsilon = \mu V^2 \frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{v}{V})^2}}$$

An dieser Wahl des Nullpunktes der Energie werden wir im folgenden festhalten. [10: 382]⁹

8 No original, em alemão: “Energiezuwachs ΔE des betrachteten Körpers stets ein Massenzuwachs $\Delta E/V^2$ entsprechen müsse, wobei V die Lichtgeschwindigkeit bedeutet.”

9 Embora seja mais conveniente definir a constante arbitrária nesta equação como zero na mecânica clássica, a expressão mais simples para ϵ na mecânica relativística é obtida ao escolher o ponto zero de modo que a energia ϵ_0 do ponto de massa estacionário seja igual a μV^2 . Obtém-se então

$$\epsilon = \mu V^2 \frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{v}{V})^2}}$$

Passaremos a adotar, a partir de agora, esta escolha do ponto zero da energia [Nossa Tradução]⁹

Em nota de rodapé Einstein abandona o fator de correção β e adota a “estipulação simplificadora” $\mu V^2 = \epsilon_0$ ¹⁰. Isto é, “massa vezes a velocidade da luz ao quadrado é igual a energia”.

Após estabelecer o contexto histórico e as controvérsias que envolvem a gênese da relação massa-energia, impõe-se a análise das deduções originais apresentadas por Einstein. Tal exame justifica-se não apenas para evidenciar o rigor lógico e matemático que sustenta essa relação, mas também para contrastar a profundidade da abordagem einsteiniana com as formulações precursoras, ressaltando a singularidade de sua contribuição na consolidação definitiva desse princípio fundamental da física.

A Dedução da Relação Massa-Energia feita por Einstein em 1905

Einstein emprega a transformação da energia, deduzida no parágrafo 8 de seu ensaio anterior, “*Sobre a Eletrodinâmica dos Corpos em Movimento*” [21], optando, pela utilização da letra l em detrimento da letra E .

$$l' = l \frac{1 \pm v/V \cos \varphi}{\sqrt{1 - (v/V)^2}}$$

Para alcançar o máximo de generalidade, é imperativo introduzir a equação com um sinal de \pm , em que o valor positivo corresponde a uma emissão no sentido crescente do eixo coordenado, enquanto o valor negativo indica a emissão no sentido oposto. Einstein postula que um corpo se encontra em repouso em relação a um referencial K e em movimento retilíneo uniforme ao longo da direção y em relação a um referencial k . Em um instante t , esse corpo emite radiação $L/2$ na direção x , em ambos os sentidos, conforme ilustrado nas Figura 1.

¹⁰ Eis a nota: “Es ist zu beachten, daß die vereinfachende Festsetzung $\mu V^2 = \epsilon_0$ zugleich der Ausdruck des Prinzipes der Äquivalenz von Masse und Energie ist, und daß im Falle des masselosen elektrisierten Körpers ϵ_0 nichts anderes ist als seine elektrostatische Energie.” [10: 382]

“Deve-se notar que a estipulação simplificadora $\mu V^2 = \epsilon_0$ também expressa o princípio da equivalência entre massa e energia, e que, no caso do corpo eletrificado, ϵ_0 não é outra coisa senão sua energia eletrostática.” [Tradução Nossa]

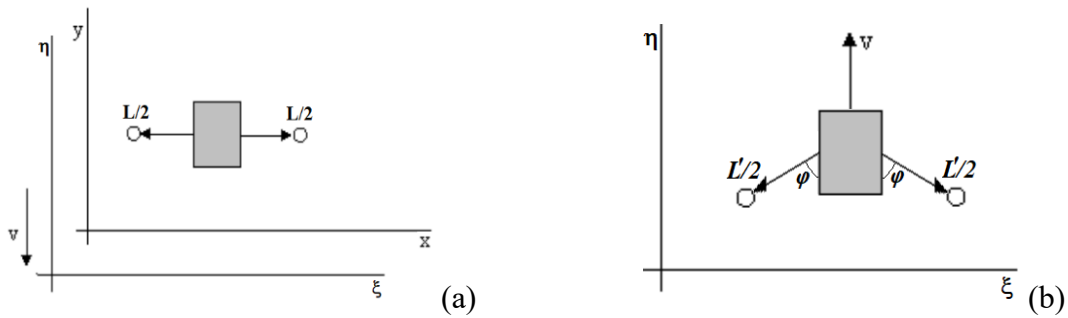


Figura 1. (a) Um corpo emite radiação $L/2$, no referencial próprio, na direção x , em ambos os sentidos, conservando o momento linear. (b) Um corpo em movimento emite radiação $L/2$, formando um ângulo em relação ao eixo η , em ambos os sentidos [22].

Como essa emissão ocorre na direção transversal ao movimento dos referenciais, tal evento é simultâneo em ambos os sistemas de referência. Do ponto de vista do referencial k , como o corpo desloca-se na direção y , o vetor associado à radiação formará um ângulo θ nos dois sentidos. Denotando E como a energia no referencial K e H como a energia no referencial k , cada sistema de referência medirá a variação de energia da seguinte forma:

$$E_o = E_1 + \left[\frac{L}{2} + \frac{L}{2} \right]$$

$$H_o = H_1 + \left[\frac{L}{2} \cdot \frac{1 - v/V \cos \varphi}{\sqrt{1 - (v/V)^2}} + \frac{L}{2} \cdot \frac{1 + v/V \cos \varphi}{\sqrt{1 - (v/V)^2}} \right]$$

Efetuada essas somas, obtém-se:

$$E_o = E_1 + L$$

$$H_o = H_1 + \frac{L}{\sqrt{1 - (v/V)^2}}$$

Subtraindo essas duas equações, chega-se a:

$$(H_o - E_o) - (H_1 - E_1) = L \left(\frac{1}{\sqrt{1 - (v/V)^2}} - 1 \right)$$

Se definirmos a diferença entre H e E como a energia cinética do corpo acrescida de uma constante arbitrária, teremos:

$$H_o - E_o = K_o + C$$

$$H_1 - E_1 = K_1 + C$$

Por meio dessas relações, Einstein define a transformação da energia cinética como:

$$K_o - K_1 = L \left(\frac{1}{\sqrt{1 - (v/V)^2}} - 1 \right)$$

Realizando a expansão binomial da raiz quadrada e desprezando os termos de ordem superior

$$K_o - K_1 = L \left(1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{V^2} - 1 \right) = \frac{L}{2} \frac{v^2}{V^2}$$

Identificando essa diferença com a equação clássica da energia cinética, conclui-se que a massa do corpo deve ser:

$$m = \frac{L}{V^2}$$

Ou, em notação moderna:

$$m = \frac{E}{c^2}$$

Dessa forma, Einstein conclui que, quando um corpo emite radiação, sua massa sofre uma redução de L/V^2 , demonstrando que a massa de um corpo está intrinsecamente relacionada ao seu conteúdo energético. Ademais, Einstein sugere, tal como observado

por Sordy, que esse fenômeno pode ser empiricamente verificado em processos de emissão radioativa.

A Dedução da Relação Massa-Energia feita por Einstein em 1906

Em 1906, em um ensaio intitulado *O Princípio da Conservação do Momento do Centro de Gravidade e a Inércia da Energia* [23], Einstein propôs uma abordagem alternativa para deduzir a relação entre massa e energia. A análise de Einstein constitui, essencialmente, uma variação da dedução apresentada por Poincaré em 1900. A seguir, expõe-se uma dedução simplificada, elaborada em notação contemporânea, fundamentada no trabalho pioneiro de Einstein publicado em 1906. Nossa análise se baseia no trabalho de Vieira *et al* [23].

Einstein considera um tubo retangular de massa M e comprimento L , em repouso em relação a um sistema de coordenadas K . Em um instante t_1 , a extremidade direita (A) do tubo emite um pulso de radiação eletromagnética, que é absorvido pela extremidade esquerda (B) no instante t_2 . Admitindo-se a conservação do momento linear, o tubo deve sofrer uma reação equivalente ao momento da luz emitida, adquirindo, assim, uma velocidade v e deslocando-se por uma distância d até que o pulso seja absorvido e o sistema retorne ao repouso (Figura 2).

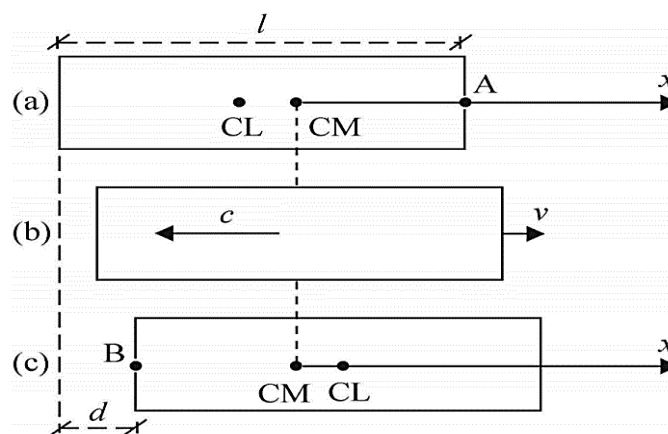


Figura 2: (a) O pulso de radiação é emitido em A. (b) O pulso desloca-se com velocidade c , enquanto o cilindro recua com velocidade v . [24: 96].

Suponha que, durante a emissão de radiação, o sistema sofra uma redução em sua inércia equivalente a m . Pelo princípio da conservação do momento, obtém-se a seguinte equação:

$$(M - m)v = \frac{E}{c}$$

$$(M - m) = \frac{E}{v \cdot c}$$

A radiação percorre, durante o intervalo Δt , uma distância $L - d$.

$$L - d = c \cdot \Delta t$$

$$\Delta t = \frac{L - d}{c}$$

No mesmo intervalo de tempo, o tubo desloca-se por uma distância d .

$$d = v \cdot \Delta t$$

$$\Delta t = \frac{d}{v}$$

Igualando essas duas equações, chega-se à relação fundamental:

$$\frac{L - d}{c} = \frac{d}{v}$$

$$L - d = \frac{c \cdot d}{v}$$

Observa-se que o centro de massa do sistema não se desloca, enquanto o centro de massa da luz desloca-se em relação a ele por uma distância d . Por simetria, durante a emissão, o centro da luz percorre uma distância $d/2$, tanto na emissão quanto na absorção. Tomando o centro de massa do sistema como a origem do sistema de coordenadas, a equação para as coordenadas do centro de massa na direção x será:

$$x_{CM} = \frac{(M - m)\left(\frac{d}{2}\right) - m\left(\frac{L-d}{2}\right)}{M} = 0$$

$$(M - m)d = m(L - d)$$

Substituindo os valores da diferença das massas e da distância $L - d$, obtém-se:

$$\frac{E \cdot d}{v \cdot c} = m \frac{c \cdot d}{v}$$

$$\frac{E}{c} = mc$$

$$E = mc^2$$

Alternativamente, esse resultado poderia ser obtido isolando a velocidade v na equação do espaço percorrido pelo tubo e substituindo-a na equação do momento. Esse procedimento pode ser visto em Resnick [25: 149-151]¹¹.

Ao final de sua análise, Einstein afirma que a conservação da massa é um caso particular da conservação de energia. Em síntese, trata-se de uma análise mais simplificada do mesmo caso estudado por Poincaré em seu ensaio de 1900 [26], que permite estabelecer uma massa *maupertusiana* para a radiação.

Conteúdo físico, formalismo matemático e forma lógica

Quanto ao conteúdo físico e a simplicidade lógica da equação, a equação de 1907 é a que mais se aproxima da forma definitiva, como fica claro quando as dispomos “lado a lado”:

$$\mu V^2 = \epsilon_0$$

$$E = mc^2$$

“No mesmo ano, Einstein mudou os símbolos e adotou c , em vez de V , para designar a velocidade da luz” [7: 151]¹². As idas e vindas da notação da equação de relação entre massa e energia não param por aí. Nos anos que se seguiram, Einstein continuou apresentando diferentes formas. Em 1912, em um manuscrito, Einstein escreve m ao invés de μ , usa L no lugar de ϵ , volta atrás, risca L e em seu lugar introduz E ¹³.

¹¹ RESNICK, Robert. *Introduction to Special Relativity*. Nova York: Wiley, 1968.

¹² Lembramos que em The Sextant Equation, Galison afirma que tal mudança ocorrera somente em 1912. Vide citação acima.

¹³ Para o manuscrito, ver [27].

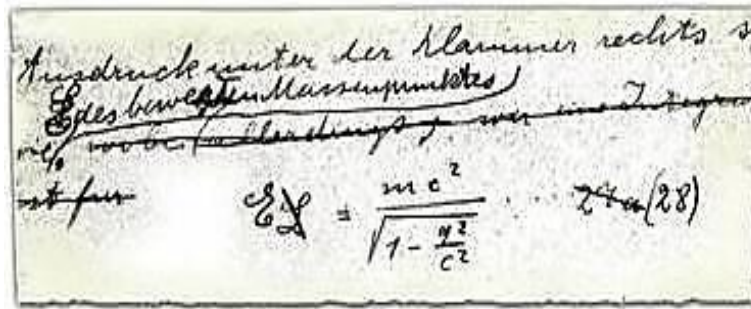


Figura 3: Detalhe do Manuscrito de 1912.

Para velocidade da luz, como vimos, ele adota c . Sendo assim, pela primeira vez teríamos, em letras do próprio Einstein, e já na notação atual, a famosa equação $E = mc^2$, embora não ainda em seu estado final com que ficou famosa, pois ainda preserva um fator de correção:

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}}$$

Ao eliminarmos o fator $\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}$ a forma simplificada resultante da equação é $E = mc^2$.

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}} \rightarrow E = mc^2$$

Em *O manuscrito de Einstein de 1912 como pista para o desenvolvimento da teoria da relatividade restrita* John Stachel esclarece que tal manuscrito nunca chegou a ser publicado por Einstein:

Em 1912, pediu-se a Albert Einstein que escrevesse um artigo de revisão sobre a teoria da relatividade (naquela época não havia ainda uma teoria da relatividade geral, de forma que não era necessário qualificar a teoria como "restrita"). Trata-se do artigo de revisão mais detalhado que Einstein escreveu, mas ele não chegou a ser publicado durante sua vida (...) [28]

Passariam algumas décadas, portanto, até que a forma simplificada fosse publicada e se tornasse popular. O próprio Einstein não a usava corriqueiramente. Ainda de acordo com Crease, foi por volta dos anos 1940 que “O próprio Einstein começou a usar a equação em sua agora famosa forma simplificada”. Por exemplo, em um artigo de 1946 na *Science Illustrated*, Einstein se utiliza da notação atual, dizendo que “é costume” expressar a relação massa-energia por meio de tal equação. Ora, seu uso de fato vinha sendo feito em algumas publicações, como o Relatório Smith (*Atomic Energy for Military Purposes*, 1945), do Projeto Manhattam, no qual lemos $E=mc^2$ logo no início do documento:

One conclusion that appeared rather early in the development of the theory of relativity was that the inertial mass of a moving body increased as its speed increased. This implied an equivalence between an increase in energy of motion of a body, that is, its kinetic energy, and an increase in its mass. To most practical physicists and engineers this appeared a mathematical fiction of no practical importance. Even Einstein could hardly have foreseen the present applications, but as early as 1905 he did clearly state that mass and energy were equivalent and suggested that proof of this equivalence might be found by the study of radioactive substances. He concluded that the amount of energy, E, equivalent to a mass, m, was given by the equation

$$E = mc^2$$

where c is the velocity of light ¹⁴ [29: 2].

Ao que tudo indica a notação atual da famosa equação só tornou-se popular de forma tardia, provavelmente a partir dos anos 1940. Logo um problema poderia ser levantado. Tendo em vista que $E = mc^2$ não consta dos artigos de 1905 e 1907, aparecendo somente em forma não simplificada, com notação atual, pela primeira vez no manuscrito

14 “Uma conclusão que surgiu logo no início do desenvolvimento da teoria da relatividade foi que a massa inercial de um corpo em movimento aumentava à medida que sua velocidade aumentava. Isso implicava uma equivalência entre um aumento na energia de movimento de um corpo, ou seja, sua energia cinética, e um aumento em sua massa. Para a maioria dos físicos e engenheiros práticos, isso parecia uma ficção matemática sem importância prática. Mesmo Einstein dificilmente poderia ter previsto as aplicações atuais, mas já em 1905 ele afirmou claramente que a massa e a energia eram equivalentes e sugeriu que a prova dessa equivalência poderia ser encontrada pelo estudo de substâncias radioativas. Ele concluiu que a quantidade de energia, E, equivalente a uma massa, m, era dada pela equação $E = mc^2$ em que c é a velocidade da luz” [Nossa tradução]. Notamos que o relatório utiliza, reiteradas vezes, a expressão consolidada na literatura, e utilizada pelo próprio Einstein, “Princípio de Equivalência” para se referir ao que aqui optamos por denominar “relação massa-energia”. Para uma breve história do Princípio de Equivalência” e sua importância na Relatividade Especial e Geral, recomendamos: Acevedo OA, Morais EM de, Pimentel BM. O Princípio de Equivalência . Rev Bras Ensino Fís [Internet]. 2019;41(3):e20180329.

de 1912, podemos afirmar que a famosa equação não fora desenvolvida pelo próprio Einstein entre 1905 e 1912? O conteúdo mais “polêmico” dessa questão pode vir à tona sob a forma de uma afirmação: o próprio Einstein não chegou a equação em 1905.

O máximo que podemos dizer é que entre 1905 e 1912 não há registro da notação $E = mc^2$, mas que a equação está lá, de modo claro, ainda que sob a forma de enunciado extensivo, no quarto artigo do *annus mirabilis*. Qual é a natureza de uma equação? E mais especificamente, qual é o conteúdo físico da equação de relação entre massa e energia? Ora, teremos tal equação, seja qual for a convenção simbólica, sempre que um determinado enunciado estabeleça que para cada quantidade de massa há uma quantidade correspondente de energia, e que a proporção é dada pela multiplicação da quantidade de massa pelo quadrado da velocidade da luz. Essa relação é válida apenas para sistemas fechados, livres de tensões e pressões externas [15; 16]. Einstein o diz claramente, por exemplo, no artigo de 1907, da seguinte maneira, já citada acima: “um aumento na energia do corpo, ΔE , deve corresponder sempre a um aumento da massa, $\Delta E/V^2$, em que V denota a velocidade da luz” [10: 371].

Essa mesma informação pode ser enunciada por meio de outras construções mais elegantes, simples, claras e o que mais o poder de síntese e a capacidade estilística do escritor nos permitir. Basta isso, para que sob uma forma simbólica qualquer, escrevamos uma equação cuja forma lógica e o conteúdo físico sejam exatamente indiscerníveis – e portanto, idênticos, conforme o princípio de Leibniz – a $E = mc^2$. Portanto, para qualquer pessoa que leu o artigo de 1905 e deduziu dele a equação de relação entre massa-energia, a “questão” de se “A Equação” está presente naquele trabalho ou era conhecida e utilizada por Einstein nos anos posteriores se revela completamente *non sense*.

Embora haja controvérsias sobre a existência de um problema real em relação à equação, no que se refere à sua forma lógica e ao conteúdo físico [13; 30], de fato existe um problema real no que diz respeito à notação, isto é, ao sistema simbólico utilizado para representá-la. Quanto a isso, já bem o vimos, entre 1905 e 1912 Einstein chegou bem perto da notação atual, escrevendo-a pela primeira vez, até onde sabemos, em 1912, em manuscrito não publicado, mas também vimos que ainda na década de 1940, ele se referia a $E = mc^2$ como uma forma utilizada “por costume” para expressar a relação de massa-energia do princípio de relatividade. A forma atual-simbólica da famosa equação mais emblemática da história da física, demorou décadas para ganhar o público.

Considerações finais

O presente artigo apresenta de maneira abrangente e detalhada a trajetória histórica, conceitual e notacional da mais célebre equação da física moderna, $E=mc^2$. Demonstra-se, com base em fontes primárias e literatura especializada, que a relação entre massa e energia foi construída de modo gradual, envolvendo contribuições anteriores, como as de Poincaré em 1900 e Hasenöhrl em 1904, e passando por um processo de amadurecimento conceitual e simbólico realizado pelo próprio Einstein.

Embora a ideia física central, de que a massa de um corpo é uma medida de seu conteúdo de energia, já estivesse claramente articulada por Einstein em 1905, a notação icônica $E=mc^2$ só foi adotada por ele anos mais tarde, provavelmente em um manuscrito de 1912. Sua popularização definitiva ocorreu apenas na década de 1940, impulsionada pelo contexto geopolítico nuclear.

O trabalho enfatiza a distinção fundamental entre a forma lógica, isto é, o conteúdo físico da relação, e a forma simbólica, ou seja, a notação específica. Argumenta-se que a essência da equação já estava presente desde 1905, ainda que expressa com símbolos diferentes, como $L=mV^2$, ou de maneira puramente verbal.

Conclui-se que a história de $E=mc^2$ constitui um exemplo paradigmático de como o conhecimento científico se desenvolve de forma não linear, coletiva e profundamente influenciada por contextos teóricos, culturais e sociais. Einstein consolidou e fundamentou a relação massa-energia no âmbito da relatividade restrita, unificando conceitos antes distintos e abrindo caminho para transformações profundas na física e na sociedade. A equação, em sua forma final, representa muito mais do que um arranjo de símbolos: é a expressão sintética de uma revolução na compreensão da natureza.

Referências

- [1] R. Capiberibe Nunes and W. Pereira de Queirós, *Cad. Bras. Ens. Fís.* **37**, 531 (2020).
- [2] C.L. Capiberibe Nunes and W. Pereira de Queirós, *Rev. Enseñ. Fís.* **36**, 161 (2024).
- [3] R. Rhodes, *The Making of the Atomic Bomb* (Simon & Schuster, New York, 1986).
- [4] W. Isaacson, *Einstein: His Life and Universe* (Simon & Schuster, New York, 2007).
- [5] D. Bodanis, *E=mc²: Uma Biografia da Equação que Mudou o Mundo e o que Ela Significa* (Editora Ediouro, Rio de Janeiro, 2004).
- [6] P. Galison, in *It Must Be Beautiful: Great Equations of Modern Science*, editado por G. Farmelo (Granta Books, New York, 2002), pp. 28-46.

- [7] R.P. Crease, *As Grandes Equações: A História das Fórmulas Matemáticas Mais Importantes e os Cientistas que as Criaram* (Editora Zahar, Rio de Janeiro, 2011).
- [8] A. Einstein, *Ann. Phys.* **323**, 639 (1905).
- [9] J. Stachel (Org.), *O Ano Miraculoso de Albert Einstein: Cinco Artigos que Mudaram a Face da Física* (Editora UFRJ, Rio de Janeiro, 2005).
- [10] A. Einstein, *Ann. Phys.* **328**, 371 (1907).
- [11] H. Hertz, *Física Mecânica e Filosofia*, (Eduerj, Rio de Janeiro, 2012).
- [12] A. Pais, *Sutil é o Senhor: A Ciência e a Vida de Albert Einstein* (Nova Fronteira, Rio de Janeiro, 1995).
- [13] H. Ives, *J. Opt. Soc. Am.* **42**, 540 (1952).
- [14] W.L. Fadner, *Am. J. Phys.* **56**, 114 (1988).
- [15] R.A. Martins, *Cad. Catarin. Ens. Fís.* **15**, 265 (1989).
- [16] R.A. Martins, *A Origem Histórica da Relatividade Especial* (Livraria da Física, São Paulo, 2015).
- [17] P. Galison, *Os Relógios de Einstein e os Mapas de Poincaré: Impérios do Tempo* (Gradiva, Lisboa, 2005).
- [18] A. Einstein, *Meus Últimos Anos* (Nova Fronteira, Rio de Janeiro, 2017).
- [19] A. Einstein e L. Infeld, *A Evolução da Física* (Zahar, Rio de Janeiro, 2008).
- [20] M. Planck, *Autobiografia Científica e Outros Ensaio*s (Contraponto, Rio de Janeiro, 2012).
- [21] A. Einstein, *Ann. Phys.* **17**, 891 (1905).
- [22] K. Brown, *Einstein on the Inertia of Energy*, MathPages (2024). Disponível em: <https://www.mathpages.com/home/kmath600/kmath600.htm>.
- [23] A. Einstein, *Ann. Phys.* **325**, 627 (1906).
- [24] S. Vieira, A. Barros, I. Araújo and J.C.T. Oliveira, *Rev. Bras. Ens. Fís.* **26**, 93 (2004).
- [26] H. Poincaré, *Arch. Néerl. Sci. Exact. Nat.* **5**, 252 (1900).
- [27] A. Einstein, *Einstein's 1912 Manuscript on the Special Theory of Relativity* (Braziller, New York, 1996), pp. 102-103, 109.
- [28] J. Stachel, *Scientiae Studia* **3**, 583 (2005).
- [29] H.D. Smith, *Atomic Energy for Military Purposes* (Princeton University Press, Princeton, 1945).

[30] J. Stachel and R. Torretti, *Am. J. Phys.* **50**, 760 (1982).

Contribuição de autoria

Vinicius Carvalho da Silva é doutor em Filosofia da Ciência e Teoria do Conhecimento (UERJ), pós-doutor (IMS-UERJ) e professor da UFMS, onde atua no PPgFil e no PPGECI. É professor do PPGFIL-UFT.

vinicius_c_silva@ufms.br

 <https://orcid.org/0000-0002-1061-2727>

Redator do documento original

Wellington Pereira de Queirós é doutor em Educação para a Ciência (UNESP), com estágio na Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC). É professor da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul (UFMS), onde atua no Instituto de Física e no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências. Também é professor colaborador do Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática da Universidade Federal de Goiás (UFG).

wellington.queiros@ufms.br

 <https://orcid.org/0000-0002-9734-7136>

Redator do documento original

Clair de Luma Capiberibe Nunes é doutora em Ensino de Ciências (UFMS) e graduada em Comunicação Social (UNIDERP) e em Física (UFMS). Atua nas áreas de Filosofia das Ciências, História e Historiografia das Ciências, Ensino de Ciências e Física-Matemática do Espaço-Tempo.

clair.capiberibe@ufms.br

 <https://orcid.org/0000-0002-6536-3131>

Redatora do documento original

Declaração: *Os autores declaram que não possuem conflitos de interesse concernentes à publicação desse preprint.*

Declaração de disponibilidade de dados de pesquisa: *Os autores declaram que todos os dados da pesquisa são públicos e estão disponíveis nas referências do documento.*

Este preprint foi submetido sob as seguintes condições:

- Os autores declaram que os necessários Termos de Consentimento Livre e Esclarecido de participantes ou pacientes na pesquisa foram obtidos e estão descritos no manuscrito, quando aplicável.
- Os autores declaram que a elaboração do manuscrito seguiu as normas éticas de comunicação científica.
- Os autores declaram que estão cientes que são os únicos responsáveis pelo conteúdo do preprint e que o depósito no SciELO Preprints não significa nenhum compromisso de parte do SciELO, exceto sua preservação e disseminação.
- Os autores declaram que os dados, aplicativos e outros conteúdos subjacentes ao manuscrito estão referenciados.
- O manuscrito depositado está no formato PDF.
- Os autores declaram que a pesquisa que deu origem ao manuscrito seguiu as boas práticas éticas e que as necessárias aprovações de comitês de ética de pesquisa, quando aplicável, estão descritas no manuscrito.
- Os autores declaram que uma vez que um manuscrito é postado no servidor SciELO Preprints, o mesmo só poderá ser retirado mediante pedido à Secretaria Editorial do SciELO Preprints, que afixará um aviso de retratação no seu lugar.
- Os autores concordam que o manuscrito aprovado será disponibilizado sob licença [Creative Commons CC-BY](#).
- O autor submissor declara que as contribuições de todos os autores e declaração de conflito de interesses estão incluídas de maneira explícita e em seções específicas do manuscrito.
- Os autores declaram que o manuscrito não foi depositado e/ou disponibilizado previamente em outro servidor de preprints ou publicado em um periódico.
- Caso o manuscrito esteja em processo de avaliação ou sendo preparado para publicação mas ainda não publicado por um periódico, os autores declaram que receberam autorização do periódico para realizar este depósito.
- O autor submissor declara que todos os autores do manuscrito concordam com a submissão ao SciELO Preprints.