NÚMEROS PERFECTOS IMPARES: RELACIÓN DE CONGRUENCIA ENTRE SUS DIVISORES PROPIOS ANALIZADOS POR PAREJAS DE PARES Y SUS IMPLICACIONES

Imanol Urcola

https://doi.org/10.1590/SciELOPreprints.12963

Envíado en: 2025-08-09
Postado en: 2025-09-01 (versión 1)
(AAAA-MM-DD)

NÚMEROS PERFECTOS IMPARES: RELACIÓN DE CONGRUENCIA ENTRE SUS DIVISORES PROPIOS ANALIZADOS POR PAREJAS DE PARES Y SUS IMPLICACIONES

ODD PERFECT NUMBERS: CONGRUENCE RELATION BETWEEN THEIR PROPER DIVISORS ANALYZED IN PAIRS OF EVEN NUMBERS AND ITS IMPLICATIONS

Imanol Urcola

Investigador independiente, Barcelona, Cataluña, España

ORCID: https://orcid.org/0009-0002-7999-103X

ABSTRACT

In this article, the existence of odd perfect numbers has been investigated by analyzing their proper divisors in pairs. Using a particular notation for the proper divisors of any given positive integer *N*, specific functions have been defined for partial sums with proper divisors, which have been used to deduct general results for perfect numbers. Based on the hypothesis that at least one odd perfect number *N* should exist, several propositions have been formulated based on the number of proper divisors of *N* and the general results. To derive propositions more specifically related to the proper divisors, the concept "d + N/d block" has been defined, which represents the sum of two proper divisors of *N* such that the larger divisor is exactly *N* divided by the smaller divisor. By studying the difference between two such blocks, a theorem has been proposed which states that all d + N/d blocks are congruent module 4 in any odd *N*. This theorem contradicts a proposition previously formulated that states that, if *N* is odd and perfect, then the sum of a certain set of d + N/d blocks should produce two different even numbers *A* and *B*, such that *A* minus *B* should be an even number of the form two multiplied by an odd number. This contradiction seems to prove that odd perfect numbers cannot exist.

Keywords: perfect numbers, congruence relation, proper divisors, Euclid-Euler Theorem, sigma function

RESUMEN

En este trabajo se ha investigado la existencia de los números perfectos impares mediante el análisis por parejas de sus divisores propios. Se ha definido una notación particular para denotar los divisores propios de cualquier número entero positivo *N*, y se han definido funciones específicas para sumas parciales de divisores propios; de las cuales se han derivado resultados generales para los números perfectos. Asumiendo la hipótesis de que existe al menos un entero positivo impar perfecto *N*, se han formulado varias proposiciones en base al número de divisores propios de *N* y a los resultados generales. Para deducir proposiciones más específicamente relacionadas con los divisores propios de *N*, se ha definido el concepto "bloque d + N/d", el cual representa la suma de dos divisores propios de *N* tal que el más grande de los divisores es exactamente *N* dividido por el más pequeño. Del estudio de la diferencia entre dos de estos bloques se ha deducido un teorema que demuestra que todos los bloques d + N/d son congruentes entre sí módulo 4 para todo *N* impar. Este teorema contradice una proposición previamente planteada que sostiene que, si *N* impar es perfecto, entonces las sumas parciales de un conjunto específico de bloques d + N/d darían como resultado dos números pares distintos *A* y *B*, donde *A* menos *B* sería un número par de la forma dos multiplicado por un impar. Esta contradicción demostraría que no existen los números perfectos impares.

Palabras clave: números perfectos, relación de congruencia, divisores propios, Teorema Euclides-Euler, función sigma

1. INTRODUCCIÓN

Sea *N* un número entero positivo. Decimos que un número entero positivo *N* es perfecto si la suma de todos sus divisores propios da como resultado *N*. Por ejemplo, el 6 es un número perfecto, el más pequeño que existe, ya que sus divisores propios son 1, 2 y 3; y 6 = 1 + 2 + 3. Estos números fueron descritos por los matemáticos griegos hace más de 2.000 años. Euclides, el más importante de los matemáticos de la Grecia Clásica, encontró los cuatro primeros (6, 28, 496 y 8128), todos ellos pares; y fue el primero en proponer una fórmula general para los números perfectos: un número par es perfecto si es de la forma $2^{p-1}(2^p - 1)$, donde $2^p - 1$ es un número primo. No encontró ningún número perfecto impar, y tampoco pudo demostrar o refutar su existencia. Durante los siguientes siglos, diversos y muy importantes matemáticos trabajaron y mejoraron los resultados de Euclides, y se encontraron hasta siete números perfectos, ninguno impar [1]. Ya en el siglo XVIII, el matemático alemán Leonhard Euler hizo un gran avance al demostrar que si un número par es perfecto, entonces es de la forma descrita por Euclides, estableciendo así el Teorema Euclides-Euler [2]. Encontró además el octavo número perfecto, pero tampoco pudo demostrar ni refutar que existe algún número perfecto impar, aunque hizo grandes avances en esta área. Gracias a la función sigma (σ), fue capaz de analizar los factores primos que tendría un hipotético número perfecto impar y proponer una forma general que un número impar N debe tener para ser perfecto; y que hoy en día se formula así: $N = p^{4k+1}M^2$; con $p = (4n+1)$ primo [3].

A día de hoy, se conocen 52 números perfectos, todos pares. Se sigue sin saber si existe alguno impar. Gracias a los descubrimientos que hizo Euler, se han hecho avances en el estudio de los números perfectos. Se han definido y estudiado otro tipo de números relacionados, como los casi-perfectos o los números perfectos múltiples [4, 5]. También se han conseguido diversos resultados parciales importantes sobre los hipotéticos números perfectos impares [6]. Por mencionar sólo un par de ellos, se sabe que si existe algún número perfecto impar N, entonces $N > 10^{1500}$ [7] y N tiene como mínimo 10 factores primos distintos [8]

El objetivo de este trabajo es intentar demostrar que no existen los números perfectos impares. Para ello, a diferencia de la mayoría de trabajos que se han centrado en el análisis de factores primos de los hipotéticos números perfectos impares, se han estudiado los divisores propios de estos juntados por parejas. Se ha comparado la relación de congruencia entre las parejas con resultados demostrados de sumas parciales de divisores propios, y se ha encontrado una contradicción que podría ser una prueba de que no existen estos números.

2. NOTACIÓN Y DEFINICIONES

Como punto de partida, estableceremos un sistema para denotar de manera generalizada a los divisores propios de los enteros positivos.

Sea N un número entero positivo. Utilizaremos la letra d para denotar a todo divisor propio de N que sea mayor que 1. Para diferenciar entre sí los distintos divisores propios mayores que 1 de N, asignaremos a cada uno un número que indique su posición con respecto a 1. Es decir, el primer divisor propio de N después de 1 será d_1, el segundo será d_2, y así sucesivamente.

Definición 2.1: definimos $z(N)$ como el número total de divisores propios de N mayores que 1. Es decir, $z(N)$ cuenta todos los divisores positivos de N excepto 1 y N. De este modo, denotaremos d_z al z-ésimo divisor propio de N mayor que 1.

Los divisores d_1 y d_z serán fundamentales para todo el desarrollo de este trabajo, con lo que deben quedar claramente definidos:

d_1 = el divisor propio más pequeño después de 1 de un entero positivo N, tal que $1< d_1< N$

d_z = el divisor propio más grande de un entero positivo N, tal que $1< d_z< N$

Ejemplo 1: divisores de N representados con la notación de este trabajo.

$$Div(N) = (1, \mathrm{d}_1, \mathrm{d}_2, \mathrm{d}_3, \ldots, \mathrm{d}_{z-2}, \mathrm{d}_{z-1}, \mathrm{d}_z, N)$$

Este sistema de notación nos ayudará más adelante a generalizar resultados. El sistema también permite referirse a un mismo divisor propio de N de distintas maneras, según se necesite. Por ejemplo, si N tiene sólo un divisor propio distinto de 1, este divisor se puede denotar como d_1 o como d_z, ambos términos harían referencia al mismo divisor. Por otro lado, esta notación permite describir un divisor de N en función de otro divisor diferente y relacionado. Y es que, si dividimos N por uno de sus divisores propios d, sólo puede haber dos resultados: N/d da d (en el caso de que N sea un número de la forma $N=d^2$) o N/d da un número distinto de d que será a su vez divisor propio de N. En el segundo caso, podemos relacionar entre sí estos dos divisores propios. Por ejemplo, podemos describir el divisor propio más grande de N como d_z pero también como N/d_1.Y viceversa, podemos escribir d_1 como N/d_z; y lo mismo ocurre con los demás divisores propios relacionados.

Ejemplo 2: los divisores propios de N representados de manera que se relacionan entre sí.

$$Div(N) = (1, d_1, \ldots d_{z-1}, d_z) \Leftrightarrow Div(N) = \left(1, d_1, d_2, \ldots, d_{\frac{z}{2}}, \frac{N}{d_{\frac{z}{2}}}, \ldots, \frac{N}{d_2}, \frac{N}{d_1}\right)$$

Como hemos dicho en la introducción, este trabajo se centra en el estudio de los divisores propios de los hipotéticos números perfectos impares analizados por parejas.

Aprovechando que nuestro sistema de notación permite escribir un divisor en función de su divisor relacionado (Ejemplo 2), vamos a definir las parejas que usaremos.

Definición 2.2: definimos como "bloque d + N/d" la suma de dos divisores de N, tal que el divisor más grande es exactamente N dividido por el divisor más pequeño. Todos los bloques d + N/d comparten la propiedad de que sus dos sumandos multiplicados entre sí dan N. Además, cada divisor de N puede formar parte de un sólo bloque. Por ejemplo, los divisores propios d_1 y d_z de cualquier N forman un bloque d + N/d, porque d_z es igual a N/d_1. También 1 y N forman un bloque, dado que N es $N/1$.

Una vez aclarada la notación y definidos los bloques que se emplearán en este trabajo, pasamos a definir los números perfectos, pero lo haremos de una forma distinta a la introducción.

Definición 2.3: un número entero positivo N es perfecto si $\sigma(N) = 2N$, siendo σ la función sumatoria de los divisores positivos de N, que se define así:

$$\sigma(N) = \sum_{d|N} d$$

Utilizando nuestra notación, diremos que N es un número perfecto si $N = 1 + d_1 + \ldots + d_z$.

Igual que la función σ suma todos los divisores de un entero positivo y nos sirve para definir los números perfectos, podemos definir otras funciones para sumas parciales de divisores propios que nos den información adicional sobre los números perfectos. Utilizaremos la notación previamente establecida para definir estas funciones y, posteriormente, poder evaluarlas en los números perfectos.

Definición 2.4: definimos $R(N)$ como la función que asigna a cada entero positivo N la suma de todos sus divisores propios menores que d_z.

$$R(N) = \sigma(N) - (N + d_z)$$

Definición 2.5: definimos $T(N)$ como la función que asigna a cada entero positivo N la suma de todos sus divisores propios mayores que d_1 y menores que d_z.

$$T(N) = R(N) - (1 + d_1)$$

3. RESULTADOS GENERALES PARA SUMAS PARCIALES DE DIVISORES PROPIOS DE LOS NÚMEROS PERFECTOS

En esta sección, calcularemos los valores de R y T para los números perfectos y analizaremos los casos concretos de los números perfectos pares e impares.

TEOREMA 1: para todo número entero positivo *N* que sea perfecto, se cumple que

(1)

$$R(N) = \frac{(d_1 - 1)N}{d_1}$$

Demostración: se deduce de la definiciones 2.3 y 2.4 que todo *N* perfecto cumple que $R(N) = N - d_z$, (dado que $\sigma(N) = 2N$). Como hemos explicado en la sección de notación, podemos describir d_z como N/d_1 y desarrollar más la expresión $N - d_z$, tal que

$$N - d_z \Rightarrow N - \frac{N}{d_1} \Rightarrow \frac{d_1 N - N}{d_1} \Rightarrow \frac{(d_1 - 1)N}{d_1}$$

Y así obtener la ecuación (1), que es cierta para todos los números perfectos.

COROLARIO 1: del Teorema 1 se deduce que si *N* es perfecto y *N* > 6, entonces

(2)

$$T(N) = \frac{(d_1 - 1)N}{d_1} - (1 + d_1)$$

Demostración: se deduce directamente de aplicar el Teorema 1 a la definición 2.5. En cuanto a que *N* debe ser mayor que 6, se deduce fácilmente renombrando sus divisores propios. Si tenemos que Div(6) = (1, 2, 3), entonces los podemos renombrar como Div(6) = (1, d_1, d_z). Por definición, $T(N)$ suma aquellos divisores propios de *N* mayores que d_1 y menores que d_z, y 6 no tiene ningún divisor propio que cumpla esta condición.

Con los valores de R y T definidos para cualquier número perfecto, analizaremos por un lado el caso de los números perfectos pares y, por otro el de los números perfectos impares.

CASO 1: *N* es un número perfecto par.

Dado que N es par, entonces $d_1=2$. De acuerdo con las ecuaciones (1) y (2), se cumple que $R = N/2$ y $T = N/2 – 3$ para todo N perfecto par.

CASO 2: N es un hipotético número perfecto impar.

Dado que N es impar, entonces d_1 es un número primo mayor o igual que 3. De acuerdo con las ecuaciones (1) y (2), R y T serán ambos pares siempre. Por ejemplo:

- Si $d_1 = 3$; entonces $R = 2N/3;$ y $T = 2N/3 – 4$
- Si $d_1 = 5$; entonces $R = 4N/5;$ y $T = 4N/5 – 6$
- Si $d_1 = 7$; entonces $R = 6N/7;$ y $T = 6N/7 – 8$
- Si $d_1 = 11$; entonces $R = 10N/11;$ y $T = 10N/11 – 12$
- …

4. HIPOTESIS DE TRABAJO Y PROPOSICIONES SOBRE LOS NÚMEROS PERFECTOS IMPARES

En esta sección, derivaremos de nuestras definiciones y resultados generales algunas propiedades de los hipotéticos números perfectos impares. Cabe recordar que en la introducción ya hemos hecho referencia a algunas de las propiedades que se sabe que estos hipotéticos números deben cumplir. No vamos a volver a enunciarlas en esta sección aunque sí que se podrán utilizar como referencias o lemas en caso de ser necesarias. Con esto aclarado, establecemos la hipótesis de que existen los números perfectos impares:

HIPÓTESIS: si N es un número perfecto impar, entonces $\exists k \in \mathbb{Z}^+$ tal que $N = 2k\text{-}1$

Una vez establecida la hipótesis, formularemos distintas proposiciones bajo la premisa de que la hipótesis es cierta. Así, al formular una proposición, se asume que esta es cierta si y sólo si la hipótesis es verdadera y, por tanto, es válida para todo número perfecto impar. De esta sección en adelante supondremos en todo momento que N es impar y perfecto.

Proposición 4.1: $z(N)$ es par, es decir, N tiene un número par de divisores propios mayores que 1.

Demostración: los divisores propios de un número impar son todos impares. N es igual a la suma de todos sus divisores propios. Para obtener un resultado impar de la suma de varios sumandos impares, es necesario que el número de sumandos sea también impar. De lo contrario, la suma de un número par de sumandos impares da un resultado par. En el caso de *N*, tenemos *z* divisores propios mayores que 1 y el propio 1, es decir, un total de $z+1$ sumandos impares, lo que implica que *z* es par necesariamente.

Proposición 4.2: *R(N)* y *T(N)* son pares.

Demostración: se deduce de desarrollar las ecuaciones (1) y (2) (véase Caso 2). También se deduce de la Proposición 4.1. La función *R(N)* suma todos los divisores propios de *N* excepto d_z, Si *N* tiene *z* divisores propios mayores que 1 y también el 1, el número de sumandos impares que suma la función *R(N)* sigue siendo *z*, un número par. De modo similar, la función *T(N)* suma $z-2$ sumandos impares, con $z-2$ también par.

Proposición 4.3: se deduce de la Proposición 4.1 que *N* no es un número de la forma $N=d^2$, tal que d|N.

Demostración: como hemos explicado en la notación en la sección 2, si tenemos un entero positivo *N* y lo dividimos por uno de sus divisores propios *d*, *N/d* es *d* o es un número distinto de *d* que es a su vez divisor propio de *N*. Si *N* fuera un número de la forma $N=d^2$ con *d* un divisor propio de *N*, entonces *z(N)* sería impar.

4.1 Sumas parciales con los bloques d + N/d de *N* un número perfecto impar

Llegados a este punto, estudiaremos los bloque d + N/d de *N* para profundizar más en las propiedades de los divisores propios de *N* y así hacer más proposiciones. Lo primero, fijémonos en que todos los bloques d + N/d son pares, ya que todos los divisores de *N* son impares y los bloques están constituidos por dos divisores.

Construiremos bloques d + N/d con los divisores propios de *N* mayores que d_1 y menores que d_z, es decir, con aquellos divisores que suma la función *T(N)*. Para poder construir estos bloques y compararlos, es necesario que *N* tenga un número mínimo de estos divisores. En concreto, necesitamos que tenga un mínimo de cuatro divisores propios mayores que d_1 y menores que d_z; para así formar un mínimo de dos bloques que podamos comparar. O lo que es lo mismo, necesitamos que *z(N)* sea igual o mayor que 6. Aunque no sabemos cuánto vale *z(N)*, podemos recurrir a un resultado previo y utilizarlo como lema.

LEMA: en base a los resultados de Nielsen [8], que demuestran que de existir un número perfecto impar este debe tener por lo menos 10 factores primos diferentes, podemos asegurar bajo la premisa de que la hipótesis es cierta que $z(N) > 6$ para cualquier N impar perfecto.

Demostración: cada factor primo representa por sí mismo un divisor propio mayor que 1 en un número entero positivo. Como un hipotético N perfecto impar debe tener al menos 10 de ellos, queda demostrado que $z(N)$ es mayor que 6 si la hipótesis es verdadera.

Hemos visto que N tiene z divisores propios mayores que 1, con z un número par y, en consecuencia, $z/2$ un entero positivo. El hecho de que z sea par implica que para cualquier divisor propio d_k mayor que 1 habrá un divisor propio relacionado N/d_k. No hay ningún divisor propio "suelto" que no forme parte de un bloque d + N/d (Proposición 4.3).

En esta parte del trabajo, nos centraremos en los divisores propios de N que suma la función $T(N)$. Construiremos bloques d + N/d con estos divisores juntando d_2 con N/d_2, d_3 con N/d_3… hasta juntar $d_{z/2}$ con $N/d_{z/2}$. De este modo, expresaremos $T(N)$ como una suma de bloques (Ejemplo 3).

<u>*Ejemplo 3*</u>*:* $T(N)$ representado como la suma de bloques d + N/d.

$$T(N) = \frac{(d_1 - 1)N}{d_1} - (1 + d_1) = \left(d_2 + \frac{N}{d_2}\right) + \left(d_3 + \frac{N}{d_3}\right) + \cdots + \left(d_{z/2} + \frac{N}{d_{z/2}}\right)$$

Pasamos de describir T como la suma de z-2 sumandos impares a describirlo como la suma de $z/2 - 1$ sumandos pares, siendo ambas representaciones equivalentes. Usaremos estos mismos bloques del Ejemplo 3 para estudiar un caso de sumas parciales con bloques.

CASO 3: suponemos que N es un número perfecto impar.

Entonces $T(N)$ es la suma de los bloques d + N/d construidos con los divisores propios de N mayores que d_1 y menores que d_z, como se muestra en el Ejemplo 3. Por tanto, utilizando todos estos bloques y haciendo sumas parciales con ellos, podemos obtener dos números enteros A y B que sumados dan T.

<u>*Ejemplo 4*</u>*:* T representado como la suma de dos números enteros A y B obtenidos de sumas parciales con los bloques d + N/d del Ejemplo 3.

$$T = \frac{(d_1 - 1)N}{d_1} - (1 + d_1) = A + B$$

Donde

$$A + B = \left(d_2 + \frac{N}{d_2}\right) + \left(d_3 + \frac{N}{d_3}\right) + \cdots + \left(d_{z/2} + \frac{N}{d_{z/2}}\right)$$

Se pueden formar distintos números *A* y *B* en función del número de bloques y de cómo se combinan; y cualquier *A* y *B* obtenidos de esta manera siempre serán pares. Por ejemplo, *A* puede estar formado por un sólo bloque y *B* por todos los demás, *A* y *B* pueden tener el mismo número de bloques, *A* puede tener el doble de bloques que *B*, etc.

Lo que nos interesa de *A* y *B* en este caso es conocer la diferencia entre ellos en términos generales. Es decir, sabemos que *A* y *B* son pares y que la diferencia entre ellos es par, pero podría ser de la forma *2(2k-1)* o *2(2k)*, incluso 0 (es decir, *A=B*). Para entender esta diferencia, observaremos con algunos ejemplos qué valores toma *T* en la ecuación (2) si sustituimos d_1 por distintos números primos:

- Si d_1 = 3; entonces *T* = 2N/3 - 4; y *T/2* = N/3 - 2 es impar.
- Si d_1 = 5; entonces *T* = 4N/5 - 6; y *T/2* = 2N/5 - 3 es impar.
- Si d_1 = 7; entonces *T* = 6N/7 - 8; y *T/2* = 3N/7 - 4 es impar.
- Si d_1 = 11; entonces *T* = 10N/11 - 12; y *T/2* = 5N/11 - 6 es impar.
- …

Proposición 4.4: para todo *N* perfecto impar, el valor de la función *T(N)* dividido por dos es impar.

Demostración: si nos fijamos en la ecuación (2), los términos d_1-1 y $1+d_1$ son números pares consecutivos. Es decir, al dividirlos entre dos, uno de ellos dará un número impar mientras que el otro dará uno par. Y como N/d_1 es impar, al dividir toda la expresión $(d_1-1)N/d_1$ entre dos, será la parte $(d_1-1)/2$ lo que determinará la paridad del resultado. Si $(d_1-1)/2$ es impar, entonces $(1+d_1)/2$ es par, lo que significa que se le restará un número par al resultado impar de dividir entre dos $(d_1-1)N/d_1$, dando *T/2* impar. Ocurre lo contrario si $(d_1-1)/2$ es par, $(1+d_1)/2$ será impar dando otra vez *T/2* impar.

Como $T/2$ es impar, ni A ni B pueden ser este número, $A \neq B$. Si suponemos que $A > B$, entonces $A - T/2 = T/2 - B$ es impar siempre, para cualquier A y B construidos de la manera que hemos definido. Por tanto, deducimos que $A - B = 2(2k\text{-}1)$, es decir, la diferencia entre A y B es par de la forma dos multiplicado por un impar.

Proposición 4.5: si tenemos N un número perfecto impar, podemos representar $T(N)$ como la suma de los bloques d + N/d construidos con los divisores propios de N mayores que d_1 y menores que d_z; lo que permite formar dos números pares A y B que suman exactamente $T(N)$ utilizando todos estos bloques y haciendo sumas parciales con ellos. En ese caso, y en base a la Proposición 4.4, la diferencia entre A y B siempre será de $2(2k\text{-}1)$ sea cual sea la combinación de bloques que usemos para formar A y B.

Para demostrar o refutar esta proposición, en la siguiente sección analizaremos la diferencia entre los bloques tipo d + N/d de N.

5. RELACIÓN DE CONGRUENCIA ENTRE LOS BLOQUES d + N/d DE *N* IMPAR

Para entender la relación entre los bloques d + N/d y los números A y B de la sección anterior y poder demostrar la Proposición 4.5, estudiaremos la diferencia entre dos bloques cualesquiera. Recordemos que todos estos bloques tienen dos características en común en nuestro N impar: 1) sus dos sumandos multiplicados entre sí dan N; y 2) ambos sumandos son impares. Esto nos permite analizar un caso general que se podrá extender directamente a todos los bloques tipo d + N/d de todo N impar.

En esta sección, nos fijaremos en todo momento en la paridad de los resultados y expresiones que iremos deduciendo. Por ello, estableceremos los siguientes términos de base que nos ayudarán a comprender mejor cada paso:

- La diferencia entre dos divisores cualesquiera de N es par.
- La diferencia entre dos bloques d + N/d es par.
- Todo número par, excepto cero, se puede expresar de la forma $2k$, con $k \in \mathbb{Z}^+$.

En consecuencia, es posible escribir tanto la diferencia entre divisores como la diferencia entre bloques como $2k$, para así facilitar el desarrollo de ciertas expresiones. Bien justificada, es una sustitución totalmente válida.

CASO 4: suponemos que N es impar y perfecto.

Partiremos de dos divisores propios cualesquiera de N, a los que denotaremos d_x y d_y, tal que $d_y > d_x$. Ambos divisores son los sumandos más pequeños de sus correspondientes bloques d + N/d, de lo que podemos deducir que:

- N/d_x y N/d_y son más grandes que d_x y que d_y, respectivamente
- Ordenados de mayor a menor, tenemos: $d_x < d_y < N/d_y < N/d_x$
- Al ser $d_y < N/d_x$, se cumple que $d_x d_y < N$

Construiremos con estos cuatro divisores dos bloques, $d_x + N/d_x$ y $d_y + N/d_y$. Aplicando la lógica y reordenando un poco los términos, observamos que la diferencia entre los bloques es exactamente igual a la diferencia entre los sumandos más grandes de cada bloque menos la diferencia entre los sumandos más pequeños:

(3)

$$\left(d_x + \frac{N}{d_x}\right) - \left(d_y + \frac{N}{d_y}\right) \Rightarrow \left(\frac{N}{d_x} - \frac{N}{d_y}\right) - (d_y - d_x)$$

Los divisores d_x y d_y son independientes entre sí, no están relacionados como sí lo están con sus respectivos N/d_x y N/d_y. Aprovechando esta relación, podemos expresar la diferencia entre N/d_x y N/d_y en función de d_x y d_y. Haciendo una resta de fracciones, obtenemos:

(4)

$$\frac{N}{d_x} - \frac{N}{d_y} \Rightarrow \frac{d_y N - d_x N}{d_x d_y} \Rightarrow (d_y - d_x)\ \frac{N}{d_x d_y}$$

En la expresión (4) tenemos dos términos bien diferenciados que están multiplicando: la resta $d_y – d_x$ y la fracción $N/d_x d_y$. Podemos ver que la fracción es entre dos números impares, lo cual nos dará como resultado o bien un número impar (en el caso de que la fracción sea un entero) o bien un número decimal. Además, sabemos que la fracción vale más que uno, porque $d_x d_y < N$.

La resta $d_y – d_x$ es un número par que expresa la diferencia entre dos divisores. Por tanto, tal y como hemos establecido al inicio de la sección, podemos sustituirla por $2k$ en la expresión (4). Y si pasamos k multiplicando a N al numerador de la fracción, obtenemos la diferencia entre N/d_y y N/d_x expresada como dos multiplicando a un término nuevo, kN/d_xd_y, que necesariamente es un entero positivo (porque N/d_y - N/d_x es también par de la forma $2k$):

$$\left(d_y - d_x\right)\frac{N}{d_xd_y} \Rightarrow 2k\frac{N}{d_xd_y} \Rightarrow 2\frac{kN}{d_xd_y}$$

Con este paso, el término kN/d_xd_y se convierte automáticamente en un entero. Ahora, podemos determinar la diferencia mínima entre N/d_y y N/d_x dando distintos valores a k. Si $k=1$, como $N/d_xd_y > 1$, la diferencia entre N/d_y y N/d_x no puede ser 2. Por la misma lógica, si $k=2$, tampoco esta diferencia puede ser 4. En cambio, sí que es posible que la diferencia entre N/d_x y N/d_y sea 6, de hecho, esta será la diferencia mínima que puede existir entre estos divisores propios. Por lo demás, en función de k, la diferencia puede ser un par de la forma dos por un impar, $2(2k\text{-}1)$, o dos por un par, $2(2k)$. Si k es par, pasa al numerador multiplicando a un número entero impar, dando kN un entero par. Si es impar, obtendremos kN impar.

Ahora, podemos combinar las expresiones (3) y (4) para obtener una nueva expresión más detallada para la diferencia entre $d_x + N/d_x$ y $d_y + N/d_y$:

(5)

$$\left(\frac{N}{d_x} - \frac{N}{d_y}\right) - \left(d_y - d_x\right) \Rightarrow \left(d_y - d_x\right)\frac{N}{d_xd_y} - \left(d_y - d_x\right) \Rightarrow \left(d_y - d_x\right)\left(\frac{N}{d_xd_y} - 1\right)$$

Obtenemos la expresión (5), muy parecida a la expresión (4) pero con una diferencia importante. Tenemos entre paréntesis la misma fracción N/d_xd_y, pero se le resta 1. Igual que antes, podemos sustituir $d_y – d_x$ por $2k$ en la expresión (5), pasar k multiplicando dentro del paréntesis y expresar $(d_x + N/d_x) – (d_y + N/d_y)$ como dos multiplicado por un entero:

$$\left(d_y - d_x\right)\left(\frac{N}{d_xd_y} - 1\right) \Rightarrow 2k\left(\frac{N}{d_xd_y} - 1\right) \Rightarrow 2\left(\frac{kN}{d_xd_y} - k\right)$$

Sabemos que el término entre paréntesis es un entero positivo (la diferencia entre dos bloques es par de la forma $2k$). Pero en esta nueva expresión, este entero entre paréntesis siempre será un número par, independientemente del valor de k:

- Si k es par, kN/d_xd_y es un entero par al que se le resta k par, dando un resultado par

- Si k es impar, kN/d_xd_y es un entero impar al que se le resta k impar, dando un resultado par

Esto implica que la diferencia entre $d_x + N/d_x$ y $d_y + N/d_y$ es de dos multiplicado por un par, o $2(2k)$. Es decir, la diferencia es de $4k$ o de un múltiplo de 4.

$$\left(d_x + \frac{N}{d_x}\right) - \left(d_y + \frac{N}{d_y}\right) = 4k$$

Dado que todos los bloques d + N/d se construyen de igual manera y tienen las mismas propiedades, este resultado se puede extender a todos los bloques de N impar. Es decir, todos los bloques d + N/d de un entero positivo impar son congruentes entre sí módulo 4

TEOREMA 2: para todo N entero positivo impar, la diferencia entre dos bloques d + N/d es siempre un múltiplo de 4. Es decir, todos los bloques tipo d + N/d de N son congruentes entre sí módulo 4.

Demostración: véase todo el desarrollo lógico del Caso 4.

Demostración de la falsedad de la Proposición 4.5 y de la Hipótesis:

El Teorema 2 demuestra que todos los bloques d + N/d son congruentes entre sí módulo 4 cuando N es impar. Esto implica que los bloques que hemos usado en el Caso 3 para construir dos números A y B deben ser también congruentes entre sí módulo 4:

$$A + B = \left(d_2 + \frac{N}{d_2}\right) + \left(d_3 + \frac{N}{d_3}\right) + \cdots + \left(d_{z/2} + \frac{N}{d_{z/2}}\right)$$

Donde

$$\left(d_2 + \frac{N}{d_2}\right) \equiv \left(d_3 + \frac{N}{d_3}\right) \equiv \left(d_4 + \frac{N}{d_4}\right) \equiv \cdots \equiv \left(d_{z/2} + \frac{N}{d_{z/2}}\right) mod(4)$$

Las propiedades básicas de la aritmética modular nos dicen que si tenemos dos números $a_1 \equiv b_1$ (mod n); y otros dos números $a_2 \equiv b_2$ (mod n); entonces $a_1+a_2 \equiv b_1+b_2$ (mod n) [9]. Esto significa que no importa cómo combinemos y sumemos los distintos bloques para obtener A y B, A y B siempre serán congruentes entre sí módulo 4. En consecuencia, si N es impar, entonces $A - B = 4k$ siempre, lo que contradice la Proposición 4.5, que es una consecuencia directa de la Hipótesis. Por tanto, la Hipótesis es también es falsa.

6. CONCLUSIONES

En este trabajo se ha concluido que el resultado de la suma de los divisores propios de un entero positivo impar mayores que d_1 y menores que d_z, definida como la función *T(N)* (Definición 2.5), no puede ser exactamente igual al valor de *T(N)* en un número perfecto (Teorema 1, Corolario 1). Por tanto, no puede existir ningún número entero positivo impar que sea perfecto.

Declaración de disponibilidad de los datos de investigación

El conjunto de datos que apoya los resultados de este estudio se publicó en el propio artículo.

Conflicto de intereses

El autor declara que no existe ningún conflicto de intereses.

Agradecimientos

A Irantzu, por su inestimable ayuda revisando y corrigiendo las múltiples versiones de este trabajo. A Mònica, por sus revisiones, su paciencia y su apoyo incondicional durante todo este duro proceso.

BIBLIOGRAFIA

[1] Sáenz de Cabezón, E. “*Apocalipsis Matemático”*. Somos B, 2020

[2] Dris, J. A. B. “Euclid-Euler heuristics for (odd) perfect numbers”. *preprint: http://arxiv.org/abs/1310.5616*, 2013

[3] Beasley, B. D. "Euler and the ongoing search for odd perfect numbers." *ACMS 19th Biennial Conference Proceedings, Bethel University*, Saint Paul, MN, 2013.

[4] Tang, M., Ma, X., and Feng, M. "On near-perfect numbers." *Colloquium Mathematicum*. Vol. 144, No. 2, 2016

[5] Cohen, G. L. "On odd perfect numbers (II), multiperfect numbers and quasiperfect numbers." *Journal of the Australian Mathematical Society*, Vol. 29, No.3, 1980, p. 369-384.

[6] Gumaru, R. C. R., Casuco, L. S., and Bernal Jr, H. L. "Formulating an Odd Perfect Number: An in Depth Case Study". *Pure and Applied Mathematics Journal*, 7, No. 5, 2018, pp. 63-67

[7] Ochem, P., and Rao, M. "Odd perfect numbers are greater than 10^{1500}". *Mathematics of Computation*, Vol. 81, No. 279, 2012, p. 1869-1877.

[8] Nielsen, P. "Odd perfect numbers, Diophantine equations, and upper bounds". *Mathematics of computation*, Vol. 84, No. 295, 2015, p. 2549-2567.

[9] Gauss, C. F. "*Disquisitiones arithmeticae"*. Yale University Press, 1966.